DM n° 1

Nombres complexes

Exercice 1.
Déterminons tout d'abord la forme trigonométrique de z (qui se prête mieux aux calculs avec des puissances). On remarque que $\frac{1}{1-i} = \frac{1+i}{2}$ et que $1+i = \sqrt{2}e^{i\pi/4}$, d'où l'on déduit successivement :

$$z = \frac{(1+i)^2}{(1-i)^3} = \frac{(1+i)^5}{8} = \frac{(\sqrt{2})^5\left(e^{i\pi/4}\right)^5}{8} = \frac{e^{5i\pi/4}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}e^{-3i\pi/4}.$$

On vient d'obtenir la forme trigonométrique de z. Sa forme algébrique s'en déduit facilement :

$$z = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\cos(-3i\pi/4) + i\sin(-3i\pi/4)\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\frac{-\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}i.$$

Exercice 2. L'égalité demandée est équivalente à la suivante (il est souvent préférable de chasser les dénominateurs) :

$$|z+z'+2z''| + |z+z'-2z''| = 2\left(|z|+|z'|\right).$$

On note A le membre de gauche, et $B = |z|+|z'|$.
En élevant A au carré (technique souvent employer quand on étudie des modules), on obtient :

$$\begin{aligned}
A^2 &= \left(|z+z'+2z''| + |z+z'-2z''|\right)^2 \\
&= |z+z'+2z''|^2 + |z+z'-2z''|^2 + 2|z+z'+2z''|\,|z+z'+2z''| \\
&= |z+z'+2z''|^2 + |z+z'-2z''|^2 + 2\left|(z+z'+2z'')(z+z'+2z'')\right| \\
&= |z+z'+2z''|^2 + |z+z'-2z''|^2 + 2\left|(z+z')^2 - 4z''^2\right| \\
&= |z+z'+2z''|^2 + |z+z'-2z''|^2 + 2\left|(z+z')^2 - 4zz'\right| \qquad \text{car } z''^2 = zz' \\
&= |z+z'+2z''|^2 + |z+z'-2z''|^2 + 2\left|(z-z')^2\right|.
\end{aligned}$$

De l'identité du parallélogramme, on déduit que :

$$\begin{aligned}
|z+z'+2z''|^2 + |z+z'-2z''|^2 &= 2|z+z'|^2 + 2|2z''|^2 = 2|z+z'|^2 + 8|z''^2| \\
&= 2|z+z'|^2 + 8|zz'| = 2|z+z'|^2 + 8|z||z'|.
\end{aligned}$$

On obtient finalement :

$$\begin{aligned}
A^2 &= 2|z+z'|^2 + 8|z||z'| + 2|z-z'|^2 \\
&= 2\left(|z+z'|^2 + |z-z'|^2 + 4|z||z'|\right).
\end{aligned}$$

L'identité du parallélogramme, appliquée de nouveau, permet de conclure :

$$A^2 = 2\left(2|z|^2 + 2|z'|^2 + 4|z||z'|\right) = 4\left(|z|^2 + |z'|^2 + 2|z||z'|\right) = 4\left(|z|+|z'|\right)^2 = 4B^2,$$

d'où l'on tire immédiatement (puisque $A, B \geq 0$) que $A = 2B$, comme demandé.

Exercice 3.

1. (a) Par définition de l'exponentielle imaginaire, on a : $z = e^{2i\pi/7}$.
D'après la formule de Moivre, $z^7 = \left(e^{2i\pi/7}\right)^7 = e^{7\times 2i\pi/7} = e^{2i\pi} = 1$.

(b) L'écriture $z = e^{2i\pi/7}$ donne la forme exponentielle de z, qui est donc de module 1 (et dont un argument est $2\pi/7$).

2. (a) On a :

$$\begin{aligned}
S+T &= z+z^2+\cdots+z^6 = \sum_{k=1}^{6} z^k = -1+\sum_{k=0}^{6} z^k \\
&= -1+\frac{z^7-1}{z-1} \qquad \text{(remarquer que } z \neq 0\text{)} \\
&= -1 \qquad \text{(car } z^7 = 1\text{)}.
\end{aligned}$$

(b) On développe le produit ST, pour obtenir :

$$\begin{aligned}
ST &= z^4+z^5+z^6+3z^7+z^8+z^9+z^{10} \\
&= z^4+z^5+z^6+3+z+z^2+z^3 \qquad \text{(car } z^7=1\text{)}. \\
&= 3+S = 3-1 = 2.
\end{aligned}$$

(c) Les relations coefficients-racines permettent d'affirmer que S et T sont les racines du trinôme $x^2-(S+T)x+ST = x^2+x+2$.

3. (a) La partie imaginaire étant compatible avec l'addition, on obtient :

$$\begin{aligned}
\operatorname{Im} S &= \operatorname{Im} z + \operatorname{Im} z^2 + \operatorname{Im} z^4 \\
&= \operatorname{Im} e^{2i\pi/7} + \operatorname{Im} e^{4i\pi/7} + \operatorname{Im} e^{8i\pi/7} \qquad \text{d'après la formule de Moivre} \\
&= \sin 2\pi/7 + \sin 4\pi/7 + \sin 8\pi/7 \\
&= \sin 2\pi/7 + \sin 4\pi/7 - \sin \pi/7.
\end{aligned}$$

(b) La fonction sin étant strictement croissante sur $[0;\pi/2]$, et étant données les inégalités $0 < \pi/7 < 4\pi/7 < \pi/2$, on peut affirmer que $\sin 4\pi/7 > \sin 2\pi/7 > \sin \pi/7$. On en déduit que $\sin 4\pi/7 - \sin \pi/7 > 0$, puis finalement que $\operatorname{Im} S > \sin 2\pi/7 > 0$, comme voulu.

(c) S et T sont les racines du trinôme x^2+x+2. Le calcul de ces racines fournit les deux complexes $\dfrac{-1\pm i\sqrt{7}}{2}$. La partie imaginaire de S étant positive, on obtient finalement :

$$S = \frac{-1+i\sqrt{7}}{2} \qquad \text{et} \qquad T = \frac{-1-i\sqrt{7}}{2}.$$