DM n° 2

Nombres complexes

Exercice 1. Rien que du très classique, ne nécessitant que de l'entraînement...

1. On commence par développer z :

$$z = \left(\sqrt{6} + i\sqrt{2}\right)\left(1/4 + i\sqrt{3}/4\right) = i\sqrt{2}.$$

La forme algébrique de z est donc $\boxed{i\sqrt{2}}$. La forme trigonométrique est alors facile à déduire :

$$\boxed{z = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{2}}.}$$

2. L'équation est ici une classique équation polynomiale du second degré. Le discriminant vaut $10^2 - 4\times 5 = 80$. Le discriminant étant strictement positif, l'équation possède donc deux solutions réelles :

$$\boxed{z_1 = \frac{-10+4\sqrt{5}}{10} = \frac{-5+2\sqrt{5}}{5} \qquad \text{et} \qquad z_2 = \frac{-10-4\sqrt{5}}{10} = \frac{-5-2\sqrt{5}}{5}.}$$

3. Plusieurs méthodes pour linéariser cette expression. On peut se lancer dans le calcul avec les formules d'Euler et on est certain d'arriver au bout. On peut aussi utiliser les formules trigonométriques, qui peuvent raccourcir les calculs si on s'y prend bien.

$$\cos^2\theta\sin^2\theta = (\cos\theta\sin\theta)^2 = \left(\frac{1}{2}\sin(2\theta)\right)^2 = \frac{1}{4}\left(\sin^2(2\theta)\right) = \frac{1}{4}\left(\frac{1-\cos(4\theta)}{2}\right) = \frac{1}{8} - \frac{1}{8}\cos(4\theta).$$

La linéarisation de $\cos^2\theta\sin^2\theta$ donne donc $\boxed{1/8 - 1/8\cos(4\theta)}$.

Exercice 2. On considère l'équation $(\mathcal{E}_1)$ suivante

$$(z+1)^5 = (z-1)^5. \qquad (\mathcal{E}_1)$$

1. (a) La formule du binôme de Newton nous permet d'écrire :

$$\begin{aligned}(\mathcal{E}_1) &\iff z^5 + 5z^4 + 10z^3 + 10z^2 + 5z + 1 = z^5 - 5z^4 + 10z^3 - 10z^2 + 5z - 1\\ &\iff 10z^4 + 20z^2 + 2 = 0\\ &\iff 5z^4 + 10z^2 + 1 = 0.\end{aligned}$$

L'équation $(\mathcal{E}_1)$ est donc équivalente à $\boxed{5z^4 + 10z^2 + 1 = 0}$.

(b) On pose $Z = z^2$; l'équation devient donc

$$5Z^2 + 10Z + 1 = 0.$$

Les choses étant bien faites, on retrouve l'équation résolue dans l'exercice 1. On a donc deux solutions Z_1 et Z_2 :

$$Z_1 = \frac{-5-2\sqrt{5}}{5} \text{ et } Z_2 = \frac{-5+2\sqrt{5}}{5}.$$

Pour trouver les solutions de $(\mathcal{E}_1)$, il faut chercher toutes les racines carrées de ces deux solutions. Comme elles sont toutes les deux négatives (en êtes-vous convaincus ?), on va trouver quatre solutions imaginaires pures pour $(\mathcal{E}_1)$:

$$Z_1 = \left(i\frac{5+2\sqrt{5}}{5}\right)^2 \text{ et } Z_2 = \left(i\frac{5-2\sqrt{5}}{5}\right)^2$$

$$\text{donc } z_1 = i\sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{5}},\ z_2 = -i\sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{5}},\ z_3 = i\sqrt{\frac{5-2\sqrt{5}}{5}},\ z_4 = -i\sqrt{\frac{5-2\sqrt{5}}{5}}.$$

L'ensemble des solutions de $(\mathcal{E}_1)$ est donc

$$\mathcal{S}_1 = \left\{ i\sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{5}},\ -i\sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{5}},\ i\sqrt{\frac{5-2\sqrt{5}}{5}},\ -i\sqrt{\frac{5-2\sqrt{5}}{5}} \right\}.$$

2. (a) Clairement, 1 n'est pas solution de $(\mathcal{E}_1)$. Par conséquent, si z est solution de $(\mathcal{E}_1)$, alors $z-1 \neq 0$ et on peut donc diviser par $(z-1)^5$. On a donc bien une équivalence entre $(\mathcal{E}_1)$ et $(\mathcal{E}_2)$.

   (b) Chercher z tel que

$$\left(\frac{z+1}{z-1}\right)^5 = 1. \tag{$\mathcal{E}_2$}$$

revient à dire qu'il existe une racine cinquième de l'unité ω telle que

$$\frac{z+1}{z-1} = \omega \tag{$\mathcal{E}_\omega$}$$

Si $\omega = 1$, l'équation $(\mathcal{E}_\omega)$ n'a pas de solution. Étudions plus en détail les cas où $w = e^{\frac{2ik\pi}{5}}$ avec $k \in [\![1,4]\!]$.
Soit $k \in [\![1,4]\!]$.

$$\begin{aligned}
\frac{z+1}{z-1} = e^{\frac{2ik\pi}{5}} &\iff z+1 = e^{\frac{2ik\pi}{5}}(z-1) \\
&\iff (1-e^{\frac{2ik\pi}{5}})z = -(1+e^{\frac{2ik\pi}{5}}) \\
&\iff z = -\frac{1+e^{\frac{2ik\pi}{5}}}{1-e^{\frac{2ik\pi}{5}}} \qquad \text{car } 1-e^{\frac{2ik\pi}{5}} \neq 0.
\end{aligned}$$

Pour simplifier cette dernière expression, on utilise la méthode de la foactorisation par l'arc moitié :

$$-\frac{1+e^{\frac{2ik\pi}{5}}}{1-e^{\frac{2ik\pi}{5}}} = -\frac{e^{\frac{ik\pi}{5}}\left(e^{-\frac{ik\pi}{5}}+e^{\frac{ik\pi}{5}}\right)}{e^{\frac{ik\pi}{5}}\left(e^{-\frac{ik\pi}{5}}-e^{\frac{ik\pi}{5}}\right)} = -\frac{2\cos\left(\frac{k\pi}{5}\right)}{2i\sin\left(-\frac{k\pi}{5}\right)} = -i\,\mathrm{cotan}\left(\frac{k\pi}{5}\right).$$

L'ensemble des solutions de l'équation $(\mathcal{E}_2)$ (et donc par équivalence, les solutions de l'équation $(\mathcal{E}_1)$) est donc

$$\mathcal{S}_2 = \left\{-i\,\mathrm{cotan}\left(\frac{k\pi}{5}\right),\ k \in [\![1,4]\!]\right\}.$$

3. (a) La fonction *cotangente* est strictement décroissante sur l'intervalle $]0,\pi[$. Par conséquent, on a

$$\mathrm{cotan}\left(\frac{\pi}{5}\right) > \mathrm{cotan}\left(\frac{2\pi}{5}\right) > \mathrm{cotan}\left(\frac{3\pi}{5}\right) > \mathrm{cotan}\left(\frac{4\pi}{5}\right);$$

ou encore

$$-\operatorname{cotan}\left(\frac{\pi}{5}\right) < -\operatorname{cotan}\left(\frac{2\pi}{5}\right) < -\operatorname{cotan}\left(\frac{3\pi}{5}\right) < -\operatorname{cotan}\left(\frac{4\pi}{5}\right).$$

Cette inégalité permet donc de classer les éléments de l'ensemble $\mathcal{S}_2$ en fonction de leur partie imaginaire.
Faisons de même pour les éléments de l'ensemble $\mathcal{S}_1$. On a

$$\frac{5-2\sqrt{5}}{5} < \frac{5+2\sqrt{5}}{5},$$

d'où

$$-\sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{5}} < -\sqrt{\frac{5-2\sqrt{5}}{5}} < \sqrt{\frac{5-2\sqrt{5}}{5}} < \sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{5}}.$$

Il n'y a plus qu'à comparer ces deux inagalités pour en conlure que

$$\operatorname{cotan}\left(\frac{\pi}{5}\right) = \sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{5}} \qquad \operatorname{cotan}\left(\frac{2\pi}{5}\right) = \sqrt{\frac{5-2\sqrt{5}}{5}}$$

$$\operatorname{cotan}\left(\frac{3\pi}{5}\right) = -\sqrt{\frac{5-2\sqrt{5}}{5}} \qquad \operatorname{cotan}\left(\frac{4\pi}{5}\right) = -\sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{5}}$$

(b) Partant de la valeur de $\operatorname{cotan}\left(\pi/5\right)$, on en déduit que

$$\cos\left(\frac{\pi}{5}\right) = \left(\sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{5}}\right)\sin\left(\frac{\pi}{5}\right).$$

En élevant cette équation au carré, on trouve

$$\cos^2\left(\frac{\pi}{5}\right) = \left(\frac{5+2\sqrt{5}}{5}\right)\sin^2\left(\frac{\pi}{5}\right)$$

ou encore, en utilisant la relation $\cos^2\left(\frac{\pi}{5}\right)+\sin^2\left(\frac{\pi}{5}\right)=1$,

$$\left(1+\frac{5+2\sqrt{5}}{5}\right)\cos^2\left(\frac{\pi}{5}\right) = \frac{5+2\sqrt{5}}{5}.$$

Donc

$$\cos^2\left(\frac{\pi}{5}\right) = \frac{5+2\sqrt{5}}{10+2\sqrt{5}} = \frac{(5+2\sqrt{5})(10-2\sqrt{5})}{80} = \frac{30+10\sqrt{5}}{80} = \frac{3+\sqrt{5}}{8}.$$

Enfin, comme on sait que le cosinus de $\pi/5$ est positif, on en déduit que

$$\cos\left(\frac{\pi}{5}\right) = \sqrt{\frac{3+\sqrt{5}}{8}}.$$

Pour le sinus, toujours en utilisant la relation $\cos^2\left(\frac{\pi}{5}\right)+\sin^2\left(\frac{\pi}{5}\right)=1$ et sachant que $\sin\left(\pi/5\right)>0$, on trouve

$$\sin\left(\frac{\pi}{5}\right) = \sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{8}}.$$