
DM n° 2
NOMBRES COMPLEXES

Exercice 1.

1. Donner les formes algébrique et trigonométrique de $z = (\sqrt{6} + i\sqrt{2})(1/4 + i\sqrt{3}/4)$.
2. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $(\mathcal{E})$ suivante :

$$5z^2 + 10z + 1 = 0. \quad (\mathcal{E})$$

3. Linéariser l'expression suivante : $\cos^2 \theta \sin^2 \theta$.

Exercice 2. On considère l'équation $(\mathcal{E}_1)$ suivante :

$$(z + 1)^5 = (z - 1)^5. \quad (\mathcal{E}_1)$$

1. (a) En développant l'équation $(\mathcal{E}_1)$ à l'aide de la formule du binôme de Newton, se ramener à une équation de degré 4.

Complément : Une telle équation qui ne possède que des termes de degré pair est appelée une équation *bicarrée*.

- (b) En posant $Z = z^2$, résoudre l'équation $(\mathcal{E}_1)$ (attention au signe de Z lorsque vous chercherez z).
2. (a) Expliquer pourquoi l'équation $(\mathcal{E}_1)$ est équivalente à l'équation $(\mathcal{E}_2)$ suivante :

$$\left(\frac{z+1}{z-1}\right)^5 = 1. \quad (\mathcal{E}_2)$$

- (b) En résolvant cette nouvelle équation, montrer que l'ensemble des solutions de $(\mathcal{E}_1)$ peut aussi s'exprimer sous la forme

$$\{-i \cotan(k\pi/5) \mid k \in \llbracket 1, 4 \rrbracket\}.$$

3. (a) En comparant les deux ensembles de solutions, donner les valeurs de $\cotan(k\pi/5)$ pour k compris entre 1 et 4.
- (b) En déduire les valeurs de $\cos(\pi/5)$ et $\sin(\pi/5)$.

Complément : $\cotan$ désigne la fonction *cotangente*.

Cette fonction est définie sur $\mathbb{R} \setminus \{k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$ par la formule :

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}, \cotan x = \frac{\cos x}{\sin x}.$$

Elle est π -périodique et elle décroît sur l'intervalle $]0, \pi[$.