DM n^{o} 3

Logique

Exercice 1. Soit k le plus petit entier strictement positif tel que $k\sqrt{2} \in \mathbb{N}$. On pose, comme suggéré par l'énoncé, $\ell = k(\sqrt{2}-1)$. $\ell = k\sqrt{2} - k$ est un entier strictement positif, strictement inférieur à k et vérifie : $\ell\sqrt{2} = 2k - k\sqrt{2} \in \mathbb{N}$, ce qui contredit la minimalité de k.

Exercice 2.

1. Il y a 0 diagonales dans un triangle, 2 dans un rectangle, 5 dans un pentagone et 9 dans un pentagone.
2. Soit $n \geqslant 3$ un entier, $\mathcal{P}_n$ un polygone à n côtés, et $\mathcal{P}_{n+1}$ un polygone à $n+1$ côtés obtenu en ajoutant un sommet à ceux de $\mathcal{P}_n$ (tout polygône à $n+1$ côtés peut s'obtenir de cette manière). Remarquons que $\mathcal{P}_n$ et $\mathcal{P}_{n+1}$ partagent $n-1$ côtés communs.
   Les diagonales de $\mathcal{P}_{n+1}$ sont de trois sortes :
   - celles de $\mathcal{P}_n$, qui sont au nombre de d_n.
   - celles issues du nouveau sommet, au nombre de $n-2$ (elles relient le nouveau sommet à tous les autres, sauf lui-même et les deux sommets voisins).
   - la diagonale formée par le côté de $\mathcal{P}_n$ qui n'est pas un côté de $\mathcal{P}_{n+1}$.

   Au final, on obtient la relation : $d_{n+1} = d_n + n - 1$.
3. Montrons le résultat par récurrence sur $n \geqslant 3$.

   Initialisation : Un triangle a bien $0 = \dfrac{0 \times (3-3)}{2}$ côtés.

   Hérédité : Soit $n \geqslant 3$. Supposons le résultat établi au rang n. Alors :

$$\begin{aligned} d_{n+1} &= d_n + n - 2 && \text{d'après la question précédente} \\ &= \frac{n(n-3)}{2} + n - 1 && \text{par hypothèse de récurrence} \\ &= \frac{n^2 - 3n + 2n - 2}{2} = \frac{n^2 - n - 2}{2} = \frac{(n+1)(n-2)}{2}, \end{aligned}$$

   ce qui établit le résultat au rang $n+1$.

   D'après le principe de récurrence, le résultat est démontré pour tout $n \geqslant 3$.

Exercice 3. Comme suggéré par l'énoncé, on distingue les deux cas suivants :

cas n^{o} 1 : $\sqrt{2}^{\sqrt{2}} \in \mathbb{Q}$.
On pose $x = y = \sqrt{2}$. x et y sont irrationnels d'après le cours, et on a bien $x^y \in \mathbb{Q}$.

cas n^{o} 2 : $\sqrt{2}^{\sqrt{2}} \notin \mathbb{Q}$.
On pose $x = \sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ et $y = \sqrt{2}$. Alors x et y sont irrationnels, et on a :

$$x^y = \left(\sqrt{2}^{\sqrt{2}}\right)^{\sqrt{2}} = \left(\sqrt{2}^{\sqrt{2}}\right)^{\sqrt{2}} = \sqrt{2}^{\sqrt{2}\times\sqrt{2}} = \sqrt{2}^{2} = 2 \in \mathbb{Q},$$

comme voulu.

Exercice 4.

1. (a) Clairement, $S_0 = \sum\limits_{k=0}^{n} 1 = n+1$.

   (b) D'après le cours, $S_1 = \dfrac{n(n+1)}{2}$.

2. (a) D'après la formule du binôme de Newton, on a :

$$\begin{aligned}
(k+1)^{p+1} - k^{p+1} &= \sum_{j=0}^{p+1} \binom{p+1}{j} k^j - k^{p+1} \\
&= \left[\sum_{j=0}^{p} \binom{p+1}{j} k^j + k^{p+1} \right] - k^{p+1} \\
&= \sum_{j=0}^{p} \binom{p+1}{j} k^j.
\end{aligned}$$

   On a ainsi exprimé $(k+1)^{p+1} - k^{p+1}$ en fonction des puissances k^j, avec $0 \leqslant j \leqslant p$.

   (b) En sommant ces égalités pour k allant de 0 jusqu'à n, on obtient :

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n} \left((k+1)^{p+1} - k^{p+1} \right) &= \sum_{k=0}^{n} \sum_{j=0}^{p} \binom{p+1}{j} k^j \\
&= \sum_{j=0}^{p} \sum_{k=0}^{n} \binom{p+1}{j} k^j \qquad \text{en permutant les signes } \sum \\
&= \sum_{j=0}^{p} \binom{p+1}{j} \underbrace{\sum_{k=0}^{n} k^j}_{S_j} = \sum_{j=0}^{p} \binom{p+1}{j} S_j = (p+1) S_p + \sum_{j=0}^{p-1} \binom{p+1}{j} S_j.
\end{aligned}$$

   D'autre part, s'agissant d'une somme téléscopique, on obtient facilement que

$$\sum_{k=0}^{n} \left((k+1)^{p+1} - k^{p+1} \right) = (n+1)^{p+1}.$$

   On en déduit aisément le résultat souhaité, à savoir :

$$(p+1) S_p = (n+1)^{p+1} - \sum_{j=0}^{p-1} \binom{p+1}{j} S_j.$$

   (c) Il suffit de développer.

   (d) • Pour $p = 2$, on obtient :

$$\begin{aligned}
3S_2 &= (n+1)^3 - \binom{3}{0} S_0 - \binom{3}{1} S_1 = (n+1)^3 - (n+1) - 3\frac{n(n+1)}{2} \\
&= (n+1)^3 - (n+1) - 3\frac{n(n+1)}{2} = \frac{(n+1)}{2} \left[2(n+1)^2 - 2 - 3n \right] \\
&= \frac{(n+1)}{2} \left[2n^2 + n \right] = \frac{(n+1)}{2} n(2n+1),
\end{aligned}$$

   d'où l'on tire immédiatement : $S_2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

- Pour $p = 3$, on obtient :

$$\begin{aligned}
4S_3 &= (n+1)^4 - \binom{4}{0} S_0 - \binom{4}{1} S_1 - \binom{4}{2} S_2 \\
&= (n+1)^3 - (n+1) - 4\frac{n(n+1)}{2} - 6\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \\
&= (n+1)\left[(n+1)^3 - 1 - 2n - n(2n+1)\right] \\
&= (n+1)\left[(n+1)^3 - 1 - 3n - 2n^2\right] \\
&= (n+1)\left[n^3 + 3n^2 + 3n + 1 - 1 - 3n - 2n^2\right] \qquad \text{(formule du binôme de Newton)} \\
&= (n+1)\left[n^3 + n^2\right] = (n+1)n^2(n+1),
\end{aligned}$$

d'où l'on tire immédiatement : $S_3 = \left(\dfrac{n(n+1)}{2}\right)^2$.

- Pour $p = 4$, on obtient :

$$\begin{aligned}
5S_4 &= (n+1)^5 - \binom{5}{0} S_0 - \binom{5}{1} S_1 - \binom{5}{2} S_2 - \binom{5}{3} S_3 \\
&= (n+1)^5 - (n+1) - 5\frac{n(n+1)}{2} - 10\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - 10\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2 \\
&= \frac{n+1}{6}\left[6(n+1)^4 - 6 - 15n - 10n(2n+1) - 15n^2(n+1)\right] \\
&= \frac{n+1}{6}\left[6(n+1)^4 - 6 - 25n - 35n^2 - 15n^3\right] \\
&= \frac{n+1}{6}\left[6n^4 + 24n^3 + 36n^2 + 24n + 6 - 6 - 25n - 35n^2 - 15n^3\right] \\
&= \frac{n+1}{6}\left[6n^4 + 9n^3 + n^2 - n\right] \\
&= \frac{n(n+1)}{6}\left[6n^3 + 9n^2 + n - 1\right] \\
&= \frac{n(n+1)}{6}\left[(2n+1)\left(3n^2 + 3n - 1\right)\right],
\end{aligned}$$

d'où l'on tire immédiatement $S_4 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1)}{30}$, expression que l'on ne factorise pas davantage par élégance, les racines du trinôme $3n^2+3n-1$ étant $-1/2 \pm \sqrt{21}/6$.