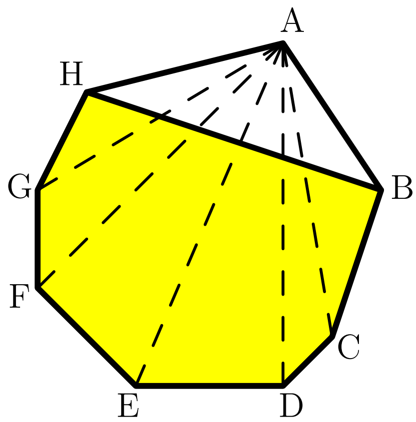
DM n° 3

Logique

Exercice 1. Dans cet exercice, on cherche à montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $n\sqrt{2}$ n'est pas un entier.
Pour cela, on raisonne par l'absurde. On suppose donc qu'il existe un tel entier.
On note k le **plus petit entier strictement positif** tel que $k\sqrt{2}$ soit un entier.
En étudiant l'expression $k(\sqrt{2}-1)$, trouver une contradiction.

Exercice 2. Le but de cet exercice est de trouver une formule donnant le nombre de diagonales dans un polygone convexe. Dans un polygone, on appelle diagonale tout segment qui joint deux sommets non consécutifs.
On note d_n le nombre de diagonales dans un polygone à n côtés.

1. Combien y a-t-il de diagonales dans un triangle ? Dans un rectangle ? Dans un pentagone ? Dans un hexagone ?
2. En vous inspirant de la figure ci-dessous, trouver une relation entre d_{n+1} et d_n.



3. Montrer alors que, pour tout $n \geqslant 3$, on a : $d_n = \dfrac{n(n-3)}{2}$.

Exercice 3. Montrer le résultat suivant :

$$\exists x, y \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q},\ x^y \in \mathbb{Q}.$$

Indication : On pourra distinguer deux cas, sans chercher à montrer lequel est vrai :

$$\textbf{cas n° 1 :}\quad \sqrt{2}^{\sqrt{2}} \in \mathbb{Q}$$
$$\textbf{cas n° 2 :}\quad \sqrt{2}^{\sqrt{2}} \notin \mathbb{Q}.$$

Exercice 4. Soient $p, n \in \mathbb{N}$. Le but de cet exercice est de calculer la somme suivante :

$$S_p = \sum_{k=0}^{n} k^p.$$

1. (a) Donner la valeur de S_0.

   (b) Montrer que $S_1 = \dfrac{n(n+1)}{2}$.

2. On suppose désormais que $p \geqslant 1$.

   (a) Soit $k \in [\![0; n]\!]$. Exprimer la différence $(k+1)^{p+1} - k^{p+1}$ en fonction des puissances k^j, avec $0 \leqslant j \leqslant p$.

   (b) En déduire que :

   $$(p+1)S_p = (n+1)^{p+1} - \sum_{j=0}^{p} \binom{p+1}{j} S_j.$$

   (c) Montrer l'égalité suivante :

   $$6n^3 + 9n^2 + n - 1 = (2n+1)\left(3n^2 + 3n - 1\right).$$

   (d) En déduire S_2, S_3 et S_4 (on factorisera au maximum les expressions obtenues).