DS n° 1 : Correction

Nombres complexes

Exercice 1. Le travail, rien que le travail, et l'entraînement...

Exercice 2. Soient n un entier naturel différent de 0 et θ un réel appartenant à l'intervalle $]0, \pi[$.

1. Les expressions C_n et S_n représentent clairement des nombres réels. Par conséquent, $C_n + iS_n$ est l'écriture algébrique du complexe A_n. On en déduit donc que C_n est la partie réelle de A_n.
2. (a) On a :

$$\begin{aligned} A_n = C_n + iS_n &= \sum_{p=1}^{n} \cos^p\theta\cos(p\theta) + i\sum_{p=1}^{n}\cos^p\theta\sin(p\theta) \\ &= \sum_{p=1}^{n}\left(\cos^p\theta\cos(p\theta) + i\cos^p\theta\sin(p\theta)\right) \\ &= \sum_{p=1}^{n}\cos^p\theta\left(\cos(p\theta)+i\sin(p\theta)\right) = \sum_{p=1}^{n}\cos^p\theta e^{ip\theta} \\ &= \sum_{p=1}^{n}\left(\cos\theta e^{i\theta}\right)^p \qquad \text{(d'après la formule de Moivre).} \end{aligned}$$

Cette dernière écriture nous permet facilement de voir A_n comme la somme des n premiers termes de la suite géométrique de premier terme $\cos\theta e^{i\theta}$ et de raison $\cos\theta e^{i\theta}$.

(b) On remarque tout d'abord que, sous les hypothèses de l'exercice, la raison $\cos\theta e^{i\theta} \neq 1$. En effet :

$$\cos\theta e^{i\theta} = 1 \iff \left(\cos^2\theta = 1 \text{ et } \cos\theta\sin\theta = 0\right) \iff \theta \equiv 0\ [\pi].$$

La formule bien connue pour la somme de termes consécutifs d'une suite géométrique donne alors :

$$\boxed{A_n = \cos\theta e^{i\theta}\frac{1-\cos^n\theta e^{in\theta}}{1-\cos\theta e^{i\theta}}.}$$

3. On a

$$\begin{aligned} 1-\cos\theta e^{i\theta} &= (1-\cos^2\theta) - i\cos\theta\sin\theta = \sin^2\theta - i\cos\theta\sin\theta \\ &= \sin\theta(\sin\theta - i\cos\theta) \\ &= \sin\theta\left(\frac{\cos\theta + i\sin\theta}{i}\right) = \sin\theta\left(\frac{e^{i\theta}}{e^{i\frac{\pi}{2}}}\right). \end{aligned}$$

Par ailleurs, comme on a choisi θ dans l'intervalle $]0, \pi[$, le réel $\sin\theta$ est strictement positif. L'écriture trigonométrique de $1-\cos\theta e^{i\theta}$ est donc

$$\boxed{1-\cos\theta e^{i\theta} = \sin\theta e^{i(\theta-\frac{\pi}{2})}.}$$

4. Revenons au calcul de A_n. On a

$$\begin{aligned}
A_n &= \cos\theta e^{i\theta}\frac{1-\cos^n\theta e^{in\theta}}{1-\cos\theta e^{i\theta}}\\
&= \cos\theta e^{i\theta}\frac{1-\cos^n\theta e^{in\theta}}{\sin\theta e^{i(\theta-\frac{\pi}{2})}} \qquad \text{(d'après la question précédente)}\\
&= \cos\theta e^{i\theta}e^{i(\frac{\pi}{2}-\theta)}\frac{1-\cos^n\theta e^{in\theta}}{\sin\theta} = \cos\theta e^{i\frac{\pi}{2}}\frac{1-\cos^n\theta e^{in\theta}}{\sin\theta}\\
&= i\cos\theta\frac{(1-\cos^n\theta\cos(n\theta))-i\cos^n\theta\sin(n\theta)}{\sin\theta} \qquad \text{(en développant } e^{in\theta}\text{)}\\
&= \frac{\cos^{n+1}\theta\sin(n\theta)+i\cos\theta(1-\cos^n\theta\cos(n\theta))}{\sin\theta}.
\end{aligned}$$

Pour trouver C_n, il suffit alors de prendre la partie réelle de l'expression précédente ; on trouve bien :

$$C_n = \frac{\cos^{n+1}\theta\sin(n\theta)}{\sin\theta}.$$

Exercice 3.

1. Pour $z \neq 2i$, on a :

$$|z'| = 1 \iff \left|\frac{z-3+i}{2i-z}\right| = 1 \iff |z-3+i| = |2i-z|.$$

En interprétant le module d'une différence comme une norme de vecteur d'extrémités les points associés aux complexes considérés, on peut directement conclure que l'ensemble des points M d'affixe $z \neq 2i$ est la médiatrice du segment $[AB]$.

2. Soit $z \in \mathbb{C}$ tel que $z'^4 = 1$. Alors (et attention, ce n'est pas une équivalence) $|z'^4| = 1$, et donc $|z'| = 1$. D'après la question précédente, le point d'affixe z appartient à la médiatrice du segment $[AB]$. Ceci étant valable quel que soit le complexe z, on en conclut que les solutions $z \in \mathbb{C}$ de l'équation $z'^4 = 1$ sont les affixes de points alignés.

3. (a) Soient z et c deux complexes. On a :

$$\begin{aligned}
|z+c|^2 &= (z+c)\overline{(z+c)} = (z+c)(\overline{z}+\overline{c})\\
&= z\overline{z}+z\overline{c}+c\overline{z}+c\overline{c} = |z|^2+2\,\mathrm{Re}(c\overline{z})+|c|^2.
\end{aligned}$$

Donc,

$$\forall (z,c) \in \mathbb{C}^2,\ |z+c|^2 = |z|^2+2\,\mathrm{Re}(c\overline{z})+|c|^2.$$

(b) Soit $z \neq 2i$. On a :

$$\begin{aligned}
|z'| = 2 &\iff \left|\frac{z-3+i}{2i-z}\right| = 2 \iff |z-3+i| = 2|2i-z|\\
&\iff |z-3+i|^2 = 4|2i-z|^2 \qquad \text{car un module est toujours positif}\\
&\iff |z|^2+2\,\mathrm{Re}((-3+i)\overline{z})+|3-i|^2 = 4|z^2|+8\,\mathrm{Re}((-2i)\overline{z})+4|2i|^2\\
&\iff 3|z^2|+2\,\mathrm{Re}((-8i+3-i)\overline{z})+6 = 0\\
&\iff 3|z^2|+2\,\mathrm{Re}((3-9i)\overline{z})+6 = 0\\
&\iff 3\left(|z^2|+2\,\mathrm{Re}((1-3i)\overline{z})+2\right) = 0\\
&\iff |z^2|+2\,\mathrm{Re}((1-3i)\overline{z})+10-8 = 0\\
&\iff |z+1-3i|^2 = 8\\
&\iff |z+1-3i| = 2\sqrt{2}.
\end{aligned}$$

On a donc bien prouvé l'équivalence $|z'| = 2 \iff |z+1-3i| = 2\sqrt{2}.$

(c) Toujours en utilisant l'interprétation géométrique du module, la question précédente nous permet d'affirmer directement que l'ensemble des points d'affixe z vérifiant $|z'| = 2$ est le cercle de rayon $2\sqrt{2}$ et de centre C d'affixe $3i - 1$.

Exercice 4.

1. Soit $\theta \in \mathbb{R}$. La formule de Moivre, ainsi que celle du binôme de Newton, nous permettent d'écrire :

$$\begin{aligned}\cos(5\theta) &= \mathrm{Re}(\cos(5\theta) + i\sin(5\theta)) \\ &= \mathrm{Re}\left((\cos\theta + i\sin\theta)^5\right) \\ &= \mathrm{Re}\left(\cos^5\theta + 5i\cos^4\theta\sin\theta - 10\cos^3\theta\sin^2\theta - 10i\cos^2\theta\sin^3\theta + 5\cos\theta\sin^4\theta + i\sin^5\theta\right) \\ &= \cos^5\theta - 10\cos^3\theta\sin^2\theta + 5\cos\theta\sin^4\theta.\end{aligned}$$

Pour faire disparaître les $\sin\theta$ de l'expression précédente, on utilise alors la relation $\sin^2\theta = 1 - \cos^2\theta$:

$$\begin{aligned}\cos(5\theta) &= \cos^5\theta - 10\cos^3\theta(1-\cos^2\theta) + 5\cos\theta(1-\cos^2\theta)^2 \\ &= \cos^5\theta - 10\cos^3\theta + 10\cos^5\theta + 5\cos\theta(1 - 2\cos^2\theta + \cos^4\theta) \\ &= \cos^5\theta - 10\cos^3\theta + 10\cos^5\theta + 5\cos\theta - 10\cos^3\theta + 5\cos^5\theta.\end{aligned}$$

En rassemblant les termes semblables, on trouve bien

$$\cos(5\theta) = 16\cos^5\theta - 20\cos^3\theta + 5\cos\theta.$$

2. Dans la relation précédente, on particularise θ en choisissant $\theta = \pi/10$. On trouve alors

$$16\cos^5\left(\frac{\pi}{10}\right) - 20\cos^3\left(\frac{\pi}{10}\right) + 5\cos\left(\frac{\pi}{10}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0.$$

En factorisant le membre de gauche par $\cos\left(\frac{\pi}{10}\right)$, on obtient alors l'égalité suivante :

$$\cos(\pi/10)\left(16\cos^4\left(\frac{\pi}{10}\right) - 20\cos^2\left(\frac{\pi}{10}\right) + 5\right) = 0.$$

On peut ensuite simplifer par $\cos\left(\pi/10\right)$ qui est non nul et ainsi affirmer que $\cos\left(\pi/10\right)$ est solution de l'équation

$$16x^4 - 20x^2 + 5 = 0.$$

3. Pour trouver la valeur de $\cos\left(\pi/10\right)$, il va donc falloir résoudre l'équation bicarrée précédente et choisir la bonne solution. Pour la résolution, on commence par poser $X = x^2$. L'équation s'écrit alors

$$16X^2 - 20X + 5 = 0.$$

Le discriminant de cette équation vaut $80 = (4\sqrt{5})^2$ et les deux solutions réelles sont

$$X_1 = \frac{5-\sqrt{5}}{8} \text{ et } X_2 = \frac{5+\sqrt{5}}{8}.$$

Ces deux réels sont strictement positifs ; l'équation bicarrée initiale possède donc bien quatre solutions réelles :

$$x_1 = -\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{8}},\ x_2 = -\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{8}},\ x_3 = \sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{8}} \text{ et } x_4 = \sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{8}}.$$

Le cosinus de l'angle $\pi/10$ étant strictement positif, seules les deux dernières solutions nous intéressent. Enfin, on sait que $0 < \pi/10 < \pi/6 < \pi/2$ et que la fonction *cosinus* est décroissante sur $\left[0, \pi/2\right]$, donc

$$\cos\left(\pi/10\right) > \cos\left(\pi/6\right)$$

$$\text{c'est-à-dire, } \cos\left(\pi/10\right) > \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Or, $2 < \sqrt{5}$, donc, en retranchant cette inégalité de 5, $5 - \sqrt{5} < 3$ et en divisant par 8,

$$\frac{5-\sqrt{5}}{8} < \frac{3}{8}.$$

Enfin, comme la racine carrée est une fonction croissante sur $\mathbb{R}_+$, on a

$$\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{8}} < \sqrt{\frac{3}{8}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{\sqrt{3}}{2} < \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Cette dernière inéquation permet donc d'exclure x_3 comme valeur possible pour $\cos\left(\pi/10\right)$; il ne reste donc plus que x_4. En conclusion,

$$\boxed{\cos\left(\pi/10\right) = \sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{8}}.}$$

Exercice 5. Soit $x \in [0, 2\pi]$. On distingue ici plusieurs cas suivant les valeurs de x.

- *Premier cas :* si $1 + \cos(2x) = 0$. Cette égalité est vérifiée pour deux valeurs de x : $\pi/2$ et $-\pi/2$. Pour ces deux valeurs, on a $\sin(2x) = 0$; l'équation devient donc $2 = 0$, qui n'a clairement aucune solution.
- *Second cas :* on suppose maintenant $1 + \cos(2x) \neq 0$. Le calcul du discriminant du trinôme donne

$$\begin{aligned}
\Delta &= 4\sin^2(2x) - 8(1+\cos(2x)) \\
&= 4(1-\cos^2(2x)) - 8(1+\cos(2x)) \\
&= 4(1-\cos^2(2x) - 2 - 2\cos(2x)) \\
&= -4(\cos^2(2x) + 2\cos(2x) + 1) \\
&= -4(\cos(2x)+1)^2.
\end{aligned}$$

Comme on a supposé $1 + \cos(2x) \neq 0$, ce discriminant est clairement *strictement* négatif et il s'écrit

$$\Delta = \left(2i(\cos(2x)+1)\right)^2.$$

Les deux solutions complexes de l'équation sont donc

$$\begin{aligned}
z_1 &= \frac{2\sin(2x) - 2i(\cos(2x)+1)}{2(1+\cos(2x))} & \text{et} \quad z_2 &= \frac{2\sin(2x) + 2i(\cos(2x)+1)}{2(1+\cos(2x))} \\
&= \frac{\sin(2x)}{1+\cos(2x)} - i = \frac{2\sin x\cos x}{2\cos^2 x} - i & &= \frac{\sin(2x)}{1+\cos(2x)} + i = \frac{2\sin x\cos x}{2\cos^2 x} + i \\
&= \frac{1}{\cos x}(\sin x + i\cos x) & &= \frac{1}{\cos x}(\sin x - i\cos x) \\
&= \frac{1}{\cos x}e^{i(-x+\frac{\pi}{2})} & &= \frac{1}{\cos x}e^{i(x+\frac{\pi}{2})}.
\end{aligned}$$

Remarque : Comme $x \neq \pm\frac{\pi}{2}$, on a bien $\cos x \neq 0$ et la fraction ci-dessus a un sens.
Pour terminer la résolution de l'équation, on cherche la forme trigonométrique de z_1 et z_2. Pour cela, il suffit d'étudier le signe de $\cos x$.

  - *Premier sous-cas :* Si $\cos x > 0$, c'est-à-dire si $x \in [0, \pi/2[$ ou $x \in]3\pi/2, 2\pi]$, alors z_1 et z_2 sont déjà sous forme trigonométrique.
  - *Second sous-cas :* Si $\cos x < 0$, c'est-à-dire si $x \in]\pi/2, 3\pi/2[$, alors on change le signe du coefficient devant l'exponentielle en retranchant π à l'argument.

En conclusion, l'ensemble des solutions (écrites sous forme trigonométrique) de l'équation initiale est

$$\boxed{\mathcal{S} = \begin{cases} \varnothing & \text{si } x = -\frac{\pi}{2} \text{ ou } x = \frac{\pi}{2}\,; \\ \left\{\frac{1}{\cos x}e^{i(-x+\frac{\pi}{2})}; \frac{1}{\cos x}e^{i(x+\frac{\pi}{2})}\right\} & \text{si } x \in [0, \pi/2[\text{ ou } x \in]3\pi/2, 2\pi]\,; \\ \left\{\frac{-1}{\cos x}e^{i(-x-\frac{\pi}{2})}; \frac{-1}{\cos x}e^{i(x-\frac{\pi}{2})}\right\} & \text{si } x \in]\pi/2, 3\pi/2[. \end{cases}}$$