— Devoir surveillé 1 —

La clarté et la précision seront prises en compte dans l'appréciation de la copie. Il est indispensable de toujours préciser quelle question ou sous-question vous êtes en train de traiter.**Les résultats essentiels, ainsi que les conclusions des questions, devront être soulignés ou encadrés.** N'oubliez jamais que c'est la conclusion explicite d'un raisonnement qui doit achever la réponse à une question ou une sous-question.

L'usage de la calculatrice n'est pas autorisé.

Exercice 1. Voir l'annexe. À rendre au bout d'une heure.

Exercice 2. Soient n un entier naturel différent de 0 et θ un réel appartenant à l'intervalle $]0, \pi[$.

On considère les expressions suivantes :

$$C_n = \sum_{p=1}^{n} \cos^p \theta \cos(p\theta); \qquad S_n = \sum_{p=1}^{n} \cos^p \theta \sin(p\theta); \qquad A_n = C_n + \imath S_n.$$

1. Que représente C_n par rapport au nombre complexe A_n ?
2. (a) Montrer que le nombre A_n peut être vu comme la somme des premiers termes d'une suite géométrique que l'on précisera.

   (b) Exprimer alors A_n directement en fonction de n et θ (sans signe $\sum$).
3. Donner la forme trigonométrique du complexe $1 - \cos\theta e^{\imath\theta}$.
4. Montrer alors que
$$C_n = \frac{\cos^{n+1}\theta \sin(n\theta)}{\sin\theta}.$$

Exercice 3. Dans le plan $\mathcal{P}$ muni d'un repère orthonormé direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$, on considère les points A et B d'affixes respectives $a = 3 - \imath$ et $b = 2\imath$.

Pour $z \in \mathbb{C} \setminus \{2i\}$, on définit le complexe z' par : $\quad z' = \dfrac{z - 3 + \imath}{2\imath - z}$.

1. Déterminer l'ensemble des points M d'affixe $z \neq 2\imath$ vérifiant : $|z'| = 1$.
2. En déduire que les solutions de l'équation $z'^4 = 1$ sont les affixes de points alignés.
3. (a) Montrer l'identité suivante :
$$\forall z, c \in \mathbb{C}, \quad |z + c|^2 = |z|^2 + 2\mathfrak{Re}(c\bar{z}) + |c|^2.$$

   (b) Soit $z \neq 2\imath$. Montrer l'équivalence suivante :
$$|z'| = 2 \quad \Longleftrightarrow \quad |z + 1 - 3\imath| = 2\sqrt{2}.$$

   (c) Déterminer le lieu des points d'affixe z vérifiant $|z'| = 2$.

Exercice 4.

1. Montrer que pour tout $\theta \in \mathbb{R}$,
$$\cos(5\theta) = 16\cos^5(\theta) - 20\cos^3(\theta) + 5\cos(\theta).$$

2. Montrer que $\cos\left({}^{\pi}/_{10}\right)$ est solution de l'équation
$$16x^4 - 20x^2 + 5 = 0.$$
3. En déduire la valeur de $\cos\left({}^{\pi}/_{10}\right)$.

Exercice 5. Soit $x \in [0, 2\pi]$. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation
$$(1 + \cos(2x))z^2 - 2\sin(2x)z + 2 = 0$$
et donner les solutions sous forme trigonométrique.

Indication : Attention à ne pas diviser par 0.

Nom : **Prénom :** Annexe.

1. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation

$$-4z^2 + 8z - 79 = 0.$$

2. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation

$$\cos(3x) - \sin(3x) = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

T.S.V.P

3. Linéariser

$$\cos^2(2x)\sin^3(3x).$$

4. Déterminer les racines carrées complexes de

$$Z = -5 - 6\imath.$$