Fiche n° 1

Nombres complexes

Exercice 1. On considère les nombres complexes $a = 1 + i$ et $b = \sqrt{3} - i$.

a) Déterminer la forme trigonométrique de a, b, et de ab.

b) Déterminer la forme algébrique de ab.

c) En déduire les valeurs exactes de $\cos \frac{\pi}{12}$ et de $\sin \frac{\pi}{12}$.

Exercice 2. Mettre sous forme algébrique, puis trigonométrique le nombre complexe $Z = \dfrac{-4}{1 + i\sqrt{3}}$. Calculer Z^3.

Exercice 3. Donner la forme trigonométrique des complexes suivants :

$$a = (\sqrt{3} + 3i)^4 \qquad b = \frac{1}{(2-2i)^3} \qquad c = \frac{(\sqrt{3}+i)^2}{(1+i)^3}.$$

Exercice 4. Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

1. $\tan\left(3x - \dfrac{\pi}{5}\right) = \tan\left(x + \dfrac{4\pi}{5}\right)$
2. $\cos x - \sqrt{3}\sin x = 1$
3. $\sin 2x = \sin x$
4. $2\cos x - 2\sin x - 1 = 0$

Exercice 5. Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. Résoudre dans $\mathbb{R}^2$ le système : $(\mathcal{S}) : \begin{cases} \cos x \cos y = a + b \\ \sin x \sin y = a - b \end{cases}$.

Exercice 6. Soit $z \in \mathbb{C}$. Montrer l'équivalence suivante :

$$|z - i| = |z + i| \Longleftrightarrow z \in \mathbb{R}.$$

Interpréter géométriquement.

Exercice 7.

a) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, le nombre complexe $\dfrac{1 + xi}{1 - xi}$ est de module 1.

b) Quels sont les complexes de module 1 qui peuvent s'écrire sous la forme $\dfrac{1 + xi}{1 - xi}$, avec $x \in \mathbb{R}$?

Exercice 8. Montrer que, pour tout $z \in \mathbb{C}$, $\dfrac{|\operatorname{Re}(z)| + |\operatorname{Im}(z)|}{\sqrt{2}} \leq |z| \leq |\operatorname{Re}(z)| + |\operatorname{Im}(z)|$.

Exercice 9. Résoudre dans $\mathbb{C}$ le système $\begin{cases} |z + 1| = 1 \\ |z - 1| = 1 \end{cases}$. Interpréter géométriquement.

Exercice 10. Simplifier, en fonction de $n \geq 1$, les expressions i^n et $(1 + i)^n$.
(On pourra judicieusement penser à utiliser la forme trigonométrique *des nombres complexes concernés).*

Exercice 11. Montrer que, pour tout entier $n \geq 0$, le nombre complexe $(2 + 3i)^n + (2 - 3i)^n$ est un nombre entier. (Indication : on pourra développer par la formule du binôme).

Exercice 12. Soient $(z, z') \in \mathbb{C}^2$. Montrer l'égalité suivante, appelée identité du parallélogramme :

$$|z+z'|^2 + |z-z'|^2 = 2(|z|^2 + |z'|^2).$$

Interpréter géométriquement.

Exercice 13. Linéariser $cos^6\theta$, $(\cos\theta)^4(\sin\theta)$, $(\cos\theta)^4(\sin\theta)^2$.
Réponse :

$$\frac{1}{32}\left(\cos 6\theta + 6\cos 4\theta + 15\cos 2\theta + 10\right),\ \frac{1}{16}\left(2\sin(\theta) + 3\sin(3\theta) + \sin(5\theta)\right),\ \frac{1}{32}\left(2 + \cos(2\theta) - 2\cos(4\theta) - \cos(6\theta)\right).$$

Indication : utiliser les formules d'Euler : $\cos\theta = \dfrac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2}$ et $\sin\theta = \dfrac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i}$. *Développer les puissances par la formule du binôme.*

Exercice 14. Soit $x \in \mathbb{R}$. Calculer les sommes suivantes :

$$S = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cos kx \qquad \text{et} \qquad S' = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \sin kx.$$

Indication : on pourra calculer $S + iS'$.

Exercice 15. Montrer, pour tout $(\theta, n) \in \mathbb{R} \times \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$,

$$\sum_{k=0}^{n-1} \cos\left(\theta + \frac{2k\pi}{n}\right) = \sum_{k=0}^{n-1} \sin\left(\theta + \frac{2k\pi}{n}\right) = 0\ .$$

Exercice 16. Résoudre dans $\mathbb{C}$:

1. $z^2 = -1 + i\sqrt{3}$
2. $z^2 = 7 - 7i$
3. $z^5 = 1$.

(*On cherchera les solutions sous forme trigonométrique*).

Exercice 17. Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations $z^2 + z + 1 = 0$ et $z^2 - 2z + 5 = 0$.

Exercice 18. Écrire les complexes $-i$ et $\dfrac{-4}{1+i\sqrt{3}}$ sous forme trigonométrique, puis résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations : $z^5 = -i$ et $z^6 = \dfrac{-4}{1+i\sqrt{3}}$.

Exercice 19. Relations coefficients/racines d'un trinôme

1. On considère les racines $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ du trinôme $az^2 + bz + c \quad (a, b, c \in \mathbb{C}, a \neq 0)$.
   Exprimer $S = z_1 + z_2$ et $P = z_1 z_2$ en fonction de a, b, c.
2. Résoudre dans $\mathbb{C}^2$ les systèmes suivants : $(S_1) : \begin{cases} z_1 + z_2 = -i \\ z_1 z_2 = 5 - 5i \end{cases}$ et $(S_2) : \begin{cases} z_1 + z_2 = i \\ z_1 z_2 = 1 - 3i. \end{cases}$

Exercices défis

Exercice 20. Montrer que l'ensemble $S = \{n \in \mathbb{N} \mid \exists (a, b) \in \mathbb{Z}^2, n = a^2 + b^2\}$ est stable par multiplication (*i.e.* le produit de deux éléments de S appartient à S).

Exercice 21. Soient u, v deux nombres complexes de modules 1.
Montrer que si $2 + uv$ est de module 1, alors $uv = -1$.

Exercice 22. Calculer la longueur d'un côté d'un polygône régulier à n sommets inscrit dans le cercle unité ($n \geq 3$).
Indication : On pourra calculer les affixes de deux sommets consécutifs bien choisis... et faire un dessin !

CORRECTIONS.

Correction n° 1. On considère les nombres complexes $a = 1+i$ et $b = \sqrt{3} - i$. Déterminer la forme trigonométrique de a, b, et de ab. Déterminer la forme algébrique de ab. En déduire les valeurs exactes de $\cos\dfrac{\pi}{12}$ et de $\sin\dfrac{\pi}{12}$.

Réponse : $\cos\dfrac{\pi}{12} = \dfrac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}$ et $\sin\dfrac{\pi}{12} = \dfrac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}$.

Correction n° 2. Mettre sous forme algébrique (forme $a+ib$) puis trigonométrique (forme $re^{i\theta}$) le nombre complexe :

$$Z = \frac{-4}{1+i\sqrt{3}}.$$

puis calculer Z^3.

$Z = -1 + i\sqrt{3}$. On factorise par $|Z|$ pour obtenir la forme trigonométrique : $Z = 2(-\dfrac{1}{2} + i\dfrac{\sqrt{3}}{2}) = 2e^{\frac{2i\pi}{3}}$.

Ainsi, $Z^3 = 2^3(e^{\frac{2i\pi}{3}})^3 = 8e^{2i\pi} = 8$.

Correction n° 3. Donner la forme trigonométrique des complexes suivants :

$$a = (\sqrt{3}+3i)^4 \ , \ b = \frac{1}{(2-2i)^3} \ , \ c = \frac{(\sqrt{3}+i)^2}{(1+i)^3}.$$

• en factorisant par le module (ici $\sqrt{12}$, encore égal à $2\sqrt{3}$), on obtient $\sqrt{3}+3i = 2\sqrt{3}(\dfrac{1}{2} + i\dfrac{\sqrt{3}}{2}) = 2\sqrt{3}e^{i\frac{\pi}{3}}$.

D'où $a = \left(2\sqrt{3}e^{i\frac{\pi}{3}}\right)^4 = 16 \times 9e^{i\frac{4\pi}{3}} = \boxed{144e^{i\frac{4\pi}{3}}.}$

• $b = \left(\dfrac{1}{(2-2i)}\right)^3$. Or $\dfrac{1}{(2-2i)} = \dfrac{2+2i}{8} = \dfrac{1+i}{4} = \dfrac{\sqrt{2}}{4}\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2} + i\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right) = \dfrac{\sqrt{2}}{4}e^{i\frac{\pi}{4}}$. D'où $b = \left(\dfrac{\sqrt{2}}{4}e^{i\frac{\pi}{4}}\right)^3 = \boxed{\dfrac{\sqrt{2}}{32}e^{\frac{3i\pi}{4}}.}$

• $\sqrt{3}+i = 2(\dfrac{\sqrt{3}}{2} + i\dfrac{1}{2}) = 2e^{\frac{i\pi}{6}}$ donc $(\sqrt{3}+i)^2 = 4e^{\frac{i\pi}{3}}$.

$1+i = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$ donc $(1+i)^3 = 2\sqrt{2}e^{i\frac{3\pi}{4}}$.

Ainsi, par quotient, $\boxed{c = \sqrt{2}e^{\frac{-5i\pi}{12}}.}$

Correction n° 4.

Correction n° 5. Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$. Résoudre dans $\mathbb{R}^2$ le système :

$$S : \begin{cases} \cos x \cos y = a+b \ (1) \\ \sin x \sin y = a-b \ (2) \end{cases}$$

Le système est équivalent à :

$$\begin{cases} \cos x \cos y + \sin x \sin y = 2a \ (1)+(2) \\ \cos x \cos y - \sin x \sin y = 2b \ (1)-(2) \end{cases}$$

Donc, en utilisant les formules de trigonométrie :

$$S \iff \begin{cases} \cos(x-y) = 2a \ (1)+(2) \\ \cos(x+y) = 2b \ (1)-(2) \end{cases}$$

On constate que si $|2a| > 1$ ou si $|2b| > 1$, alors le système n'a pas de solution. Ainsi :
1er cas : si $a \notin [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ <u>ou</u> $b \notin [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$:
l'ensemble des solutions est $\emptyset$.
2eme cas : si $a \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ <u>et</u> $b \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$:
Il existe α et β deux réels tels que $2a = \cos\alpha$ et $2b = \cos\beta$. Ainsi,

$$S \iff \begin{cases} \cos(x-y) = \cos\alpha \\ \cos(x+y) = \cos\beta \end{cases} \iff \begin{cases} x-y \equiv \alpha[2\pi] \text{ ou } x-y \equiv -\alpha[2\pi] \\ x+y \equiv \beta[2\pi] \text{ ou } x-y \equiv -\beta[2\pi] \end{cases}$$

Ainsi, le système (S) est équivalent à l'un des quatre systèmes suivants :

$$S_1 : \begin{cases} x-y \equiv \alpha[2\pi] \\ x+y \equiv \beta[2\pi] \end{cases} \quad S_2 : \begin{cases} x-y \equiv -\alpha[2\pi] \\ x+y \equiv \beta[2\pi] \end{cases} \quad S_3 : \begin{cases} x-y \equiv \alpha[2\pi] \\ x+y \equiv -\beta[2\pi] \end{cases} \quad S_4 : \begin{cases} x-y \equiv -\alpha[2\pi] \\ x+y \equiv -\beta[2\pi] \end{cases}$$

Détaillons la résolution de S_1 :

$$\begin{cases} x-y = \alpha + 2k\pi, \ k \in \mathbb{Z}, \\ x+y = \beta + 2k'\pi, \ k' \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

en faisant la somme et la différence de ces deux lignes, on obtient le système équivalent suivant :

$$S_1 \iff \begin{cases} 2x = \alpha+\beta+2(k+k')\pi, \ k \in \mathbb{Z}, \ k' \in \mathbb{Z}, \\ 2y = \beta-\alpha+2(k'-k)\pi, \ k \in \mathbb{Z}, \ k' \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

On divise par 2 et on pose $n = k+k'$ et $m = k'-kk$. n et m prennent toutes les valeurs possible de $\mathbb{Z}$. On obtient :

$$S_1 \iff \begin{cases} x = \dfrac{\alpha+\beta}{2} + n\pi, \ n \in \mathbb{Z}, \\ y = \dfrac{\beta-\alpha}{2} + m\pi, \ m \in \mathbb{Z}. \end{cases} \iff \begin{cases} x \equiv \dfrac{\alpha+\beta}{2} \ [\pi], \\ y \equiv \dfrac{\beta-\alpha}{2} \ [\pi]. \end{cases}$$

On fait de même pour S_2, S_3 et S_4. On obtient :

$$S \iff \begin{cases} x \equiv \dfrac{\alpha+\beta}{2} \ [\pi], \\ y \equiv \dfrac{\beta-\alpha}{2} \ [\pi]. \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} x \equiv \dfrac{-\alpha+\beta}{2} \ [\pi], \\ y \equiv \dfrac{\beta+\alpha}{2} \ [\pi]. \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} x \equiv \dfrac{\alpha-\beta}{2} \ [\pi], \\ y \equiv \dfrac{-\beta-\alpha}{2} \ [\pi]. \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} x \equiv \dfrac{-\alpha-\beta}{2} \ [\pi], \\ y \equiv \dfrac{-\beta+\alpha}{2} \ [\pi]. \end{cases}$$

L'ensemble des solutions est donc :

$$\left\{ \begin{array}{c} \left(\dfrac{\alpha+\beta}{2} + n\pi, \dfrac{\beta-\alpha}{2} + m\pi\right), \left(\dfrac{-\alpha+\beta}{2} + n\pi, \dfrac{\beta+\alpha}{2} + m\pi\right), \\ \left(\dfrac{\alpha-\beta}{2} + n\pi, \dfrac{-\beta-\alpha}{2} + m\pi\right), \left(\dfrac{-\alpha-\beta}{2} + n\pi, \dfrac{-\beta+\alpha}{2} + m\pi\right) \end{array} \middle| \ (n,m) \in \mathbb{Z}^2 \right\}$$

Correction n° 6.

Correction n° 7.

Correction n° 8.
Montrer que, pour tout $z \in \mathbb{C}$, $\dfrac{|\operatorname{Re}(z)| + |\operatorname{Im}(z)|}{\sqrt{2}} \leq |z| \leq |\operatorname{Re}(z)| + |\operatorname{Im}(z)|$.

L'inégalité de droite s'obtient par inégalité triangulaire en écrivant : $z = \operatorname{Re}(z) + i\operatorname{Im}(z)$. D'où $|z| \leq |\operatorname{Re}(z)| + |i\operatorname{Im}(z)|$, puis le résultat.
L'inégalité de gauche est plus délicate.
Remarquons au brouillon qu'elle est équivalente à : $(|\operatorname{Re}(z)| + |\operatorname{Im}(z)|)^2 \leq 2|z|^2$*, donc, en développant le carré et en remplaçant* $|z|$ *par sa définition :* $|\operatorname{Re}(z)|^2 + 2|\operatorname{Re}(z)||\operatorname{Im}(z)| + |\operatorname{Im}(z)|^2 \leq 2(\operatorname{Im}(z)^2 + \operatorname{Re}(z)^2)$*. C'est encore équivalent à* $0 \leq |\operatorname{Re}(z)|^2 - 2|\operatorname{Re}(z)||\operatorname{Im}(z)| + |\operatorname{Im}(z)|^2$*. Ceci est toujours vrai car c'est* $0 \leq (|\operatorname{Re}(z) - |\operatorname{Im}(z)|)^2$*. Nous allons donc partir de cette inégalité.*
Nous savons que $0 \leq (|\operatorname{Re}(z) - |\operatorname{Im}(z)|)^2$. Donc, en développant : $0 \leq |\operatorname{Re}(z)|^2 - 2|\operatorname{Re}(z)||\operatorname{Im}(z)| + |\operatorname{Im}(z)|^2$. D'où $2|\operatorname{Re}(z)||\operatorname{Im}(z)| \leq |\operatorname{Re}(z)|^2 + |\operatorname{Im}(z)|^2$. Ajoutons $|\operatorname{Re}(z)|^2 + |\operatorname{Im}(z)|^2$ à chacun des membres de cette inégalité : $2|\operatorname{Re}(z)||\operatorname{Im}(z)| + |\operatorname{Re}(z)|^2 + |\operatorname{Im}(z)|^2 \leq 2(|\operatorname{Re}(z)|^2 + |\operatorname{Im}(z)|^2)$. D'où $(|\operatorname{Re}(z)| + |\operatorname{Im}(z)|)^2 \leq 2|z|^2$. Puis, en appliquant la fonction racine carrée qui est croissante sur $\mathbb{R}_+$, et en remarquant que $|\operatorname{Re}(z)| + |\operatorname{Im}(z)|$ et $|z|$ sont des quantités positives : $|\operatorname{Re}(z)| + |\operatorname{Im}(z)| \leq \sqrt{2}|z|$. On en déduit la seconde inéalité.

Correction n° 12. Soient $(z, z') \in \mathbb{C}^2$. Montrer l'égalité suivante, appelée identité du parallélogramme :

$$|z + z'|^2 + |z - z'|^2 = 2(|z|^2 + |z'|^2).$$

Utilisons l'expression du module à l'aide des conjugués :
$|z + z'|^2 = (z + z')\overline{(z + z')} = z\overline{z} + z\overline{z'} + z'\overline{z} + z'\overline{z'}$.
De même, $|z - z'|^2 = (z - z')\overline{(z - z')} = z\overline{z} - z\overline{z'} - z'\overline{z} + z'\overline{z'}$.
Ainsi, $|z + z'|^2 + |z - z'|^2 = 2(z\overline{z} + z'\overline{z'}) = 2(|z|^2 + |z'|^2)$.
Interprétation géométrique : la somme des carrés des côtés d'un parallélogramme est égale à la somme des carrés de ses diagonales.