Feuille d'exercices n°1 : Systèmes linéaires

Exercice 1 Résoudre les systèmes linéaires suivants. Donner dans chaque cas une interprétation graphique du résultat.

$$a) \begin{cases} x + 2y = 8 \\ 3x - 4y = 4 \end{cases}$$

$$c) \begin{cases} 2x + y = 7 \\ 3x + 2y = 12 \\ 4x - 3y = 2 \end{cases}$$

$$b) \begin{cases} x + 2y = 10 \\ 2x - 2y = -4 \\ 3x + 5y = 26 \end{cases}$$

Exercice 2 Résoudre les systèmes linéaires suivants

$$a) \begin{cases} x + 2y + 3z = 6 \\ 2x - 3y + 2z = 14 \\ 3x + y - z = 2 \end{cases}$$

$$d) \begin{cases} 3x + 2y + z = 2 \\ 4x + 2y + 2z = 8 \\ x - y + z = 4 \end{cases}$$

$$b) \begin{cases} x + y - z = 2 \\ 2x - y + 2z = 3 \\ 6x + 2z = 10 \end{cases}$$

$$e) \begin{cases} x + 2y - 3z = -4 \\ 2x + 3y - 3z = 4 \end{cases}$$

$$c) \begin{cases} x - y + z = 4 \\ 2x + y + z = 4 \\ x + 5y - z = 2 \end{cases}$$

$$f) \begin{cases} 2x - y + z = 8 \\ 3x - z = 3 \\ x - y - z = 0 \end{cases}$$

Exercice 3 Même question avec

$$a) \begin{cases} -2x + y - z - t = -1 \\ 2x + 2y - 2t = 1 \\ -2x - y - z - 2t = 1 \\ -2x + y - t = -1 \end{cases}$$

$$b) \begin{cases} x + z + t = 2 \\ x - t = 4 \\ y + t = -1 \\ y + z - t = -1 \end{cases}$$

$$c) \begin{cases} x - y + z + t = 1 \\ 3x + 2y + 2t = 3 \\ x + y + z = -1 \\ -x + y + z - t = 0 \end{cases} \quad d) \begin{cases} x + 2y + 3z + 4t = 30 \\ 2x - 3y + 5z - 2t = 3 \\ 3x + 4y - 2z - t = 1 \\ 4x - y + 6z - 3t = 8 \end{cases}$$

Exercice 4 *Et ça continue...*

$$a) \begin{cases} x + 2y + 3z + 4t = 5 \\ x + 3y + 5z + 7t = 11 \\ x - z - 2t = -6 \end{cases} \quad d) \begin{cases} 3x + 4y + z + 2t = 3 \\ 6x + 8y + 2z + 5t = 7 \\ 9x + 12y + 3z + 10t = 13 \end{cases}$$

$$b) \begin{cases} x + y + z + t = 0 \\ x + t = 0 \\ x + 2y + z = 0 \end{cases} \quad e) \begin{cases} x + y + 2z - 5t = 3 \\ 2x + 5y - z - 9t = -3 \\ 2x + y - z + 3t = -11 \\ x - 3y + 2z + 7t = -5 \end{cases}$$

$$c) \begin{cases} 2x + y + z + t = 3 \\ x + 2y + z + t = 1 \\ x + y + 2z + t = 2 \\ x + y + z + 2t = 4 \end{cases} \quad f) \begin{cases} x + 2y + 3z + 4t + 5u = 6 \\ x + 3y + 5z + 7t + 4u = 13 \\ x + 4y + 7z + 10t + 3u = 20 \\ x + 2y + 4z + 6t + 8u = 13 \end{cases}$$

Exercice 5 a) *Résoudre*

$$\begin{cases} -x_2 + 2x_3 + x_5 + 4x_6 - 3x_7 = 1 \\ -3x_2 + 7x_3 + 4x_4 + 6x_5 + 12x_6 - 10x_7 = 3 \\ x_2 + 8x_4 + 5x_5 - 2x_6 - 3x_7 = 5 \\ -x_2 + 3x_3 + 4x_4 + 4x_5 + 2x_6 + 3x_7 = -14 \\ x_2 + 8x_4 + 5x_5 + 2x_6 - 14x_7 = 26 \end{cases}$$

b) *Même question mais avec seconds membres 6, 20, -4, 10, -7.*

c) *Même question mais avec seconds membres 1, 2, -1, -5, 6.*

d) *Même question mais avec seconds membres 0, 0, 2, 1, 2.*

Exercice 6 *Dans chaque cas, on déterminera pour quelles valeurs des paramètres $a, b, c, d, \dots$, le système a une solution. On dira alors si celle-ci est unique. Enfin, on résoudra le système pour les valeurs données.*

$$a) \begin{cases} x - y + 2z & = a \\ -2x + 2y - z & = b \\ -x + y + 7z & = c \end{cases}, \quad a = 1, b = -1, c = 2.$$

$$b) \begin{cases} x + 2y & = a \\ -x - 4y + z & = b \\ 2x + 6y + 2z & = c \\ -x - 6y + 5z & = d \end{cases}, \quad a = 1, b = -1, c = 2, d = -1.$$

$$c) \begin{cases} x + 2y - z + 3t & = a \\ 3x + 6y - 2z + 10t & = b \\ -x - 2y + 2z - 2t & = c \\ 2x + 4y - 4z + 4t & = d \end{cases}, \quad a = 1, b = 2, c = -2, d = 4.$$

Exercice 7 Déterminer l'unique polynôme du troisième degré à coefficients dans $\mathbb{R}$ vérifiant

$$P(1) = 0, P(-1) = -4, P(2) = 5, P(-2) = -15.$$

Exercice 8 L'année prochaine, Yvonne aura deux fois l'âge que sa fille a aujourd'hui. Et elle se souvient que quand Xavier est né, Zelda fêtait juste ses six ans. En fait, dans cinq ans, Xavier et Zelda auront à eux deux exactement l'âge de leur mère. Quel est l'âge du capitaine ? En fait, du futur capitaine ! car Xavier ne le deviendra que quand il sera deux fois plus âgé, juste un an avant que sa maman ne fête ses soixante ans.

Exercice 9 Discuter et résoudre en fonction du paramètre m .

$$a) \begin{cases} x + y + z & = m + 1 \\ mx + y + (m - 1)z & = m \\ x + my + z & = 1 \end{cases} \quad c) \begin{cases} x + y + (1 - m)z & = m + 2 \\ (1 + m)x - y + 2z & = 0 \\ 2x - my + 3z & = m + 2 \end{cases}$$

$$b) \begin{cases} (1 + m)x + y + z & = 2 \\ x + y + (1 - m)z & = 1 + m \\ x + (1 - m)y + z & = 1 \end{cases}$$

Exercice 10 Discuter et résoudre en fonction des paramètres (a, b dans le premier cas et a, b, c, d dans le second).