Université de Rennes I
B04-Espaces vectoriels et applications linéaires
2006-2007

Feuille d'exercices n^o 2

1 Sous-espaces vectoriels

Exercice 1.1. Dans $\mathbb{R}^2$, donner une interprétation géométrique des sous-ensembles suivants et déterminer ceux qui sont des sous-espaces vectoriels :

$$\begin{array}{ll}
F_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, 3x+2y=2\} & F_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x+2y=0\} \\
F_3 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, xy=1\} & F_4 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x^2-y^2=0\} \\
F_5 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, \sin(x+y)=0\} & F_6 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x^2+y^2 \leq 1\} \\
F_7 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x+y=1\} & F_8 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|x=2\} \\
G_1 = \{(u,3u) \,|\, u \in \mathbb{R}\} & G_2 = \{(2u+v,3v) \,|\, u \in \mathbb{R}, v \in \mathbb{R}\} \\
G_3 = \{(u+v,u-v) \,|\, u \in \mathbb{R}, v \in \mathbb{R}\} &
\end{array}$$

Exercice 1.2. Dans $\mathbb{R}^3$, donner une interprétation géométrique des sous-ensembles suivants et déterminer ceux qui sont des sous-espaces vectoriels :

$$\begin{array}{l}
F_1 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, 3x+2y+5z=0\} \\
F_2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, x+2y-z=3\} \\
F_3 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, x^2+y^2+z^2=1\} \\
F_4 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, x+2y+z=0 \text{ et } 3x+2y-z=0\} \\
F_5 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, x-y=0\} \\
G_1 = \{(u,3u,5u) \,|\, u \in \mathbb{R}\} \\
G_2 = \{(2+v,u+3v,1-v) \,|\, u \in \mathbb{R}, v \in \mathbb{R}\} \\
G_3 = \{(3u-v,2u+v,u+v) \,|\, u \in \mathbb{R}, v \in \mathbb{R}\}
\end{array}$$

Exercice 1.3. Donner un exemple de deux sous-espaces vectoriels S, T non nuls de $\mathbb{R}^3$ tels que

a) $S \cup T$ ne soit pas un sous-espace vectoriel.

b) $S \cup T$ soit un sous-espace vectoriel.

On pourra s'aider d'un dessin.

Exercice 1.4. Peut-on trouver un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ ayant un seul élément ? Deux éléments distincts?

Exercice 1.5. Dans le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{C}$, donner une interprétation géométrique des sous-ensembles suivants et déterminer ceux qui sont des sous-espaces vectoriels :

$$\begin{array}{l}
F_1 = \{z \in \mathbb{C}^* \,|\, \arg(z) = \pi/4 + k\pi, k \in \mathbb{Z}\} \cup \{0\} \\
F_2 = \{z \in \mathbb{C} \,|\, |z| = 1\} \\
F_3 = \{z \in \mathbb{C} \,|\, z = \overline{z}\} \\
F_4 = \{z \in \mathbb{C} \,|\, (3+i)z + (3-i)\overline{z} = 0\}
\end{array}$$

Exercice 1.6. Les sous-ensembles suivants de $\mathbb{R}^3$ sont-ils des sous-espaces vectoriels ?

1. $F_1 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, xy = 0\}$
2. L'ensemble S_1 des solutions (x_1, x_2, x_3) du système
$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 - 4x_2 + 7x_3 = 0 \\ x_1 + 3x_2 - 6x_3 = 0 \end{cases}$$
3. L'ensemble S_2 des solutions (x_1, x_2, x_3) du système
$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 - 4x_2 + 7x_3 = 0 \\ x_1 + 3x_2 - 6x_3 = 0 \end{cases}$$
4. L'ensemble V des vecteurs $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ orthogonaux au vecteur $(-1,3,-2)$.

Exercice 1.7. Soient D une droite vectorielle de $\mathbb{R}^2$ et Δ la réunion du vecteur nul et des vecteurs n'appartenant pas à D. L'ensemble Δ est-il un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$?

Exercice 1.8. Dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}[X]$ des polynômes à coefficients réels, on considère les sous-ensembles suivants. Lesquels sont des sous-espaces vectoriels ? (on note $\deg(P)$ le degré d'un polynôme P, et on pose $\deg(0) = -\infty$).

$F_1 = \{P \in \mathbb{R}[X] \,|\, \deg(P) = 3\}$
$F_2 = \{P \in \mathbb{R}[X] \,|\, \deg(P) \leq 4 \text{ ou } P \text{ est pair}\}$
$F_3 = \{P \in \mathbb{R}[X] \,|\, \deg(P) \leq 4 \text{ et } P \text{ est pair}\}$
$F_4 = \{P \in \mathbb{R}[X] \,|\, P(X+1) = P(X)\ \}$
$F_5 = \{P \in \mathbb{R}[X] \,|\, P(X) + 1 = P(X)\ \}$
$F_6 = \{P \in \mathbb{R}[X] \,|\, P \text{ unitaire, c'est à dire de coefficient dominant égal à } 1\}$
$F_7 = \{P \in \mathbb{R}[X] \,|\, P \text{ sans terme constant}\}$

Exercice 1.9. Dans l'espace vectoriel des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, on considère les sous-ensembles suivants. Lesquels sont des sous-espaces vectoriels ?

$F_1 = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \,|\, \forall x \in \mathbb{R}\ ,\ f(x) \geq 0\ \}$
$F_2 = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \,|\, \forall n \in \mathbb{N}\ ,\ f(n) = 0\ \}$
$F_3 = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \,|\, \forall n\ (n \in \mathbb{N} \text{ et } n > 0)\ ,\ f(n) = 1\ \}$
$F_4 = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \,|\, \lim_{x\to+\infty} f(x) \text{ existe et est finie}\}$
$F_5 = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \,|\, \lim_{x\to+\infty} f(x) = \pm\infty\}$
$F_6 = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \,|\, \lim_{x\to+\infty} f(x) = 0\}$
$F_7 = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \,|\, f \text{ est paire}\}$
$F_8 = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \,|\, \forall\, x \in \mathbb{R}\ ,\ f(-x) = -f(x)\ \}$
$F_9 = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \,|\, f \text{ est bornée}\}$
$F_{10} = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \,|\, f(1) = 0, f(4) = 0, f(3) = 7\}$

Exercice 1.10. Dire si les sous-ensembles suivants sont des sous-espaces vectoriels.

a) L'ensemble des fonctions f de classe $\mathcal{C}^2$ (c'est à dire deux fois dérivables avec dérivée seconde continue) vérifiant $f'' + 2f = 0$ dans $\mathcal{C}^2(\mathbb{R})$.

b) L'ensemble des fonctions f vérifiant $\int_0^1 \sin x f(x)dx = 0$ dans $\mathcal{C}^0([0,1])$ (l'ensemble des fonctions continues de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$)

c) L'ensemble des fonctions f vérifiant $f(0) = 7f(1) + \int_0^1 t^3 f(t)dt$ dans $\mathcal{C}^0([0,1])$.

d) L'ensemble des primitives de la fonction $x\,e^x$ sur $\mathbb{R}$ dans l'ensemble des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

Exercice 1.11.
Les ensembles de suites de nombres réels suivants sont-ils des sous-espaces vectoriels de l'espace vectoriel des suites de nombres réels?:
- l'ensemble des suites arithmétiques ;
- l'ensemble des suites convergentes ;
- l'ensemble des suites de limite ℓ ;
- l'ensemble des suites (u_n) de réels satisfaisant la relation : $u_{n+1} = u_n + u_{n-1}$;
- l'ensemble des suites (u_n) de réels satisfaisant la relation : $u_{n+1} = u_n^2$;
- l'ensemble des suites (u_n) de réels satisfaisant la relation : $u_{n+1} = n^2 u_n$.

2 Familles de vecteurs génératrices, espaces engendrés

Exercice 2.1. Soit E un espace vectoriel. Soient x et y deux éléments de E. Le vecteur x est-il combinaison linéaire de x et y ? Le vecteur nul de E est-il combinaison linéaire de x et y ?

Exercice 2.2. Application directe de la définition d'espace engendré Montrer que la famille (v_1, v_2), où $v_1 = (1,2)$ et $v_2 = (-1,1)$, engendre $\mathbb{R}^2$.

Exercice 2.3.
Soit D la droite vectorielle de $\mathbb{R}^2$ définie par l'équation cartésienne : $2x - 3y = 0$.

a) Compléter : $\begin{cases} x &= ... \\ y &= t \end{cases}$ pour que ce système soit une représentation paramétrique de D.

b) Donner une autre représentation paramétrique de D.

c) Donner deux vecteurs différents v_1 et v_2 tels que $D =$Vect$(v_1) =$Vect(v_2). Quelle est la relation entre ces deux vecteurs

Exercice 2.4. Appartenance à un sous-espace vectoriel engendré
a) On considère les vecteurs de $\mathbb{R}^3$ suivants : $e_1 = (1,1,0)$, $e_2 = (1,0,-1)$, $e_3 = (1,2,1)$, et $e_4 = (0,1,-1)$. Le vecteur $u = (2,1,-1)$ est-il combinaison linéaire de e_1, e_2, et e_3 ?
Y-a-t-il plusieurs choix possibles pour les coefficients de la combinaison linéaire ?
Le vecteur $v = (0,0,1)$ est-il combinaison linéaire de e_1, e_2, et e_3 ?
Reprendre les questions ci-dessus en remplaçant (e_1, e_2, e_3) par "(e_1, e_2, e_4)".

b) Soient dans $\mathbb{R}^4$ les vecteurs $u_1 = (1,2,3,4)$, $u_2 = (1,-2,3,-4)$.
Peut-on trouver des réels x et y pour que $(x,1,y,1) \in$Vect(u_1,u_2) ?
Même question avec $(x,1,1,y)$.

Exercice 2.5. Dans $\mathbb{R}^3$, montrer, de deux manières, que les vecteurs $a_1 = (1, 2, 3)$ et $a_2 = (2, -1, 1)$ engendrent le même espace sous-espace vectoriel que $b_1 = (1, 0, 1)$ et $b_2 = (0, 1, 1)$:

a) en écrivant a_1 et a_2 comme combinaisons linéaires de b_1 et b_2, vous obtiendrez une des inclusions. Un calcul simple, vous donnera l'autre.

b) en comparant l' équation qui caractérise $\text{Vect}(a_1, a_2)$ et celle qui caractérise $\text{Vect}(b_1, b_2)$.

Question subsidiaire :
Les deux équations paramétriques suivantes définissent-elles le même plan ?

$$\begin{cases} x &= \lambda + 2\mu \\ y &= 2\lambda - \mu \\ z &= 3\lambda + \mu \end{cases} \quad \begin{cases} x &= \lambda \\ y &= \mu \\ z &= \lambda + \mu \end{cases}$$

Exercice 2.6. Dans $\mathbb{R}^3$, on considère les plans d'équations :

$$\begin{array}{ll} 2x + 3y + 4z = 0 & H_1 \\ x + y + z = 0 & H_2 \end{array}$$

a) Donner une représentation paramétrique du plan H_1. En déduire des vecteurs u et v tels que $H_1 = \text{Vect}(u, v)$.

b) Donner une représentation paramétrique de $H_1 \cap H_2$ et l'exprimer avec la notation Vect.

Exercice 2.7. Où l'on voit que tous les paramétrages ne sont pas linéaires
Parmi les sous-ensembles suivants de $\mathbb{R}^2$, dire lesquels sont des sous-espaces vectoriels (on pourra s'aider éventuellement d'une représentation graphique) :

$$a) \begin{cases} x &= t \\ y &= t^2 \end{cases} \quad b) \begin{cases} x &= 2t \\ y &= 5t \end{cases} \quad c) \begin{cases} x &= r\cos t \\ y &= r\sin t \end{cases} (r > 0)$$

$$d) \begin{cases} x &= 3t - 1 \\ y &= 4t + 3 \end{cases} \quad e) \begin{cases} x &= 3t - 3 \\ y &= -t + 1 \end{cases}$$

Exercice 2.8. Comparaison de sous-espaces vectoriels définis par leurs générateurs

a) Dans $\mathbb{R}^3$, comparer les sous-espaces vectoriels F et G suivants : $F = \text{Vect}(\ (2, 3, 1), (1, -1, 2)\ )$ et $G = \text{Vect}(\ (3, 7, 0), (5, 0, +7)\ )$

b) Dans $\mathbb{R}^4$, on pose : $u_1 = (1, 0, 1, 1)$, $u_2 = (-1, -2, 3, -1)$, $u_3 = (-5, -3, 1, -5)$ et $v_1 = (-1, -1, 1, -1)$, $v_2 = (4, 1, 2, 4)$. Comparer $\text{Vect}(u_1, u_2, u_3)$ et $\text{Vect}(v_1, v_2)$.

Exercice 2.9. Exercice 3 du contrôle continu 2002 (Voir les deux dernières pages)

Exercice 2.10. équations de sous-espace vectoriel

a) Démontrer que le sous-espace vectoriel E_1 de $\mathbb{R}^4$ engendré par les vecteurs $a_1 = (1, 2, 0, 1)$, $a_2 = (2, 3, 0, 3)$, et $a_3 = (3, 2, 1, 2)$ peut être défini par une équation que l'on déterminera.

b) Démontrer que le sous-espace vectoriel E_2 de $\mathbb{R}^4$ engendré par les vecteurs $b_1 = (2, -1, 4, 0)$ et $b_2 = (-1, 0, -3, 4)$ peut être défini par deux équations que l'on déterminera.

3 Famille libre, base

3.1 Avec les définitions de famille génératrice, de famille libre et de base

Exercice 3.1. Sur une feuille de papier quadrillée, dessinez trois vecteurs dont les origines et les extrémités sont situées sur des intersections de lignes. Trouvez une relation de dépendance linéaire entre ces trois vecteurs.

Exercice 3.2. Soient u, v, w trois vecteurs de $\mathbb{R}^3$ non colinéaires deux à deux. Peut-on affirmer que la famille (u, v, w) est libre ? Si oui, le démontrer, sinon, donner un contre exemple.

Exercice 3.3. Soit $n \in \mathbb{N}$ et (u_1, u_2, u_3, u_4) une famille libre de vecteurs de $\mathbb{R}^n$.
Les familles suivants sont-ils libres ?

$a)(u_1, u_2, u_3, u_4, 0)$ $\qquad$ $b)(u_1, 2u_2, u_3)$
$c)(u_1, 2u_1 + u_3, u_3)$ $\qquad$ $d)(3u_1 + u_2, u_2, u_3 + u_2)$
$e)(u_1 - u_2, u_2 - u_3, u_3 - u_4, u_4 - u_1)$

Exercice 3.4. Trouver une relation de dépendance linéaire non triviale entre les vecteurs $a_1 = (3, 1, -1)$, $a_2 = (-1, 1, 2)$, $a_3 = (1, -1, 1)$ et $a_4 = (5, -2, 3)$.

Exercice 3.5. Donner une famille génératrice, puis une base des sous-espaces suivants de $\mathbb{R}^2$:

$$A_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x + 2y = 0\}, \quad A_2 = \{(a + b, a - b) | a, b \in \mathbb{R}\}$$

Exercice 3.6. Reprendre l'exercice précédent, dans $\mathbb{R}^3$, pour les ensembles suivants :

$$\begin{aligned} A_1 &= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | x + y + 2z = 0\} \\ A_2 &= \{(a + b, a - b, a + b) | a, b \in \mathbb{R}\} \\ A_3 &= \{(x, 2x, x) | x \in \mathbb{R}\} \end{aligned}$$

Exercice 3.7.

a) Résoudre et discuter le système linéaire suivant :

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 3x_3 + 10x_4 = b_1 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 + 4x_4 = b_2 \\ x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 13x_4 = b_3 \end{cases}$$

b) Dans l'espace $\mathbb{R}^3$, on se donne les quatre vecteurs suivants :

$$v_1 = (1, 1, 1), v_2 = (1, 2, 3), v_3 = (3, 1, 4), v_4 = (10, 4, 13)$$

Monter que la famille (v_1, v_2, v_3, v_4) est génératrice de $\mathbb{R}^3$ mais n'est pas libre et donner une relation de dépendance linéaire. Trouver une base de $F = \mathrm{Vect}(\mathrm{v}_1, \mathrm{v}_2, \mathrm{v}_3, \mathrm{v}_4)$ extraite de cette famille.

Exercice 3.8. Dire si les vecteurs suivants sont linéairement indépendants ; s'ils ne le sont pas, déterminer un sous-ensemble maximal dont les vecteurs le sont, et écrire les autres vecteurs en fonction de ceux-ci.

a) $(0, 1, 1, 1), (-1, 0, 1, -1), (1, 1, 0, 2)$ dans $\mathbb{R}^4$ considéré comme espace vectoriel sur $\mathbb{R}$

b) $(3-i, 1+i, 2-2i, i, 1), (1, 1, 1-i, 2-i, i), (3, 1+2i, 3-i, 1+3i, 0)$ dans $\mathbb{C}^5$ considéré comme espace vectoriel sur $\mathbb{C}$

c) $1-x, x-x^2, 1-x^2, x-x^3$ dans $\mathbb{R}[x]$ considéré comme espace vectoriel sur $\mathbb{R}$

d) $\sin, \cos$ dans $\{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\}$ considéré comme espace vectoriel sur $\mathbb{R}$

Exercice 3.9. A l'aide d'opérations élémentaires sur les vecteurs, déterminer une base et la dimension des sous-espaces vectoriels engendrés par les familles de vecteurs suivantes :

a) $u_1 = (3, 1, -1)$, $u_2 = (-1, 1, 2)$, $u_3 = (1, -1, 1)$, $u_4 = (5, -2, 3)$ dans $\mathbb{R}^3$;

b) $u_1 = (2, 5, 7)$, $u_2 = (-1, 4, 0)$; $u_3 = (3, -1, 2)$ dans $\mathbb{R}^3$;

c) $u_1 = (1, 2, 3)$, $u_2 = (3, 2, 1)$, $u_3 = (3, 3, 3)$, $u_4 = (5, 0, -5)$ dans $\mathbb{R}^3$.

Exercice 3.10. "Questions de cours"

a) Donner une base et la dimension de $\mathbb{R}^3$ comme espace vectoriel sur $\mathbb{R}$

b) Donner une base et la dimension de $\mathbb{C}^3$ comme espace vectoriel sur $\mathbb{C}$

c) Donner une base et la dimension de $\mathbb{C}^3$ comme espace vectoriel sur $\mathbb{R}$

Exercice 3.11. Avec des polynômes

Dans l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels : $\mathbb{R}[X]$, vérifier si nécessaire, que les sous-ensembles suivants sont des sous-espaces vectoriels et en déterminer une base.

$$\begin{aligned}
&F_1 = \{P \in \mathbb{R}[X] \mid P(X) = aX^2 + bX(X-7) + c\ \} \\
&F_2 = Vect(X, X(X+1), X+1) \\
&F_3 = Vect((X-1)^2, X^2-1, X+1, X-1) \\
&F_4 = \{P \in \mathbb{R}_n[X] \mid P(X) \text{ multiple de } (X^2+1)\}
\end{aligned}$$

Exercice 3.12. Exercice III du contrôle continu 2003 et Exercice 2 contrôle continu 2002 (Voir les deux dernières pages)

Espaces de fonctions

Exercice 3.13. Soit E l'espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ des applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Soit F le sous-espace vectoriel engendré par la famille de fonctions $(f_1, \ldots, f_4)$:
$f_1(x) = \mathrm{sh}(x)$, $f_2(x) = \mathrm{ch}(x)$, $f_3(x) = e^x$, $f_4(x) = e^{-x}$.
Déterminer une base de F.

Exercice 3.14. Soit E l'espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ des applications de $]-1, 1[$ dans $\mathbb{R}$. Soit F le sous-espace vectoriel engendré par la famille de fonctions $(f_1, \ldots, f_4)$:
$f_1(x) = \dfrac{1}{x-1}$, $f_2(x) = \dfrac{1}{x+1}$, $f_3(x) = \dfrac{2}{x^2-1}$, $f_4(x) = \dfrac{x+5}{x^2-1}$.
Montrer que la famille (f_1, f_2) est libre.
Déterminer une base de F. (Pensez à la décomposition en éléments simples)

Exercice 3.15. Pour tout x réel, $E(x)$ désigne la partie entière de x.
Soit E l'espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ des applications de $[0, 2[$ dans $\mathbb{R}$. Soit F le sous-espace vectoriel engendré par la famille de fonctions $(f_1, \ldots, f_5)$:
$f_1(x) = 1-x$, $f_2(x) = |1-x|$, $f_3(x) = E(x)$, $f_4(x) = xE(x)$, $f_5(x) = 1+x$.
Montrer que la famille (f_1, f_2, f_3) est libre.

Déterminer une base B de F contenant la famille (f_1, f_2, f_3). Quel est la dimension de F? Soit $g \in E$, définie par $g(x) = 2 + 4x$, si $x < 1$ et $g(x) = 0$, si $x \geq 1$. Montrer que $g \in F$ et donner ses composantes dans la base B.

Exercice 3.16. Montrer que dans l'espace vectoriel des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, la famille de fonctions $(f_1, f_2, ..., f_7)$ définies par $f_1(x) = \sin x$, $f_2(x) = \sin 2x$, $f_3(x) = e^x$, $f_4(x) = |x|$, $f_5(x) = e^{-x}$, $f_6(x) = \cos x$, $f_7(x) = \cos 2x$ forme une famille libre.
(penser à exploiter la dérivabilité, le comportement à l'infini, la parité...)
En déduire une base de $F = Vect(f_1, f_2, ..., f_7)$.

Exercice 3.17. Soit E l'espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ des applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, et n un entier, $n \geq 1$. On note $c_k : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ l'application définie par $x \mapsto \cos kx$ et $s_k : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ l'application définie par $x \mapsto \sin kx$

a) Montrer que $(s_1, s_2, ..., s_n)$ est une famille libre (on pourra raisonner par récurrence).

b) En déduire que $(c_0, c_1, c_2, ..., c_n)$ est une famille libre,
puis que $(c_0, c_1, c_2, ..., c_n, s_1, s_2, ..., s_n)$ est libre (penser à la parité).

Exercice 3.18. Montrer que la famille $(f_a)_{a\in\mathbb{R}}$ des applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définies par $f_a(x) = |x - a|$ est une famille libre. Donner une base de $Vect((f_a)_{a\in\mathbb{R}})$.

3.2 Avec les théorèmes du cours sur famille génératrice, famille libre, base, dimension

Exercice 3.19.

a) Soit (u_1, u_2, u_3) une famille génératrice de vecteurs de $\mathbb{R}^3$. (u_2, u_3) est-elle une famille libre de $\mathbb{R}^3$?

b) Soient (u_1, u_2, u_3) une famille génératrice de vecteurs de $\mathbb{R}^2$, et v un vecteur de $\mathbb{R}^2$.

- (u_1, u_2, u_3, v) est-elle une famille génératrice de $\mathbb{R}^2$?
- (u_1, u_2, u_3) est-elle une famille libre de $\mathbb{R}^2$?

Exercice 3.20. Dans $\mathbb{R}^4$ on considère les quatre vecteurs :
$v_1 = (1, -1, 0, 0)$, $v_2 = (1, 0, -1, 0)$, $v_3 = (1, 0, 0, -1)$ et $v_4 = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$.

a) Vérifiez que v_1,v_2, v_3 et v_4 appartiennent au sous-espace vectoriel F d'équation $x + y + z + t = 0$.

b) (v_1, v_2, v_3, v_4) est-elle une famille libre de vecteurs de $\mathbb{R}^4$?

c) (v_1, v_2, v_3, v_4) est-elle une famille génératrice de vecteurs de $\mathbb{R}^4$?

d) (v_1, v_2, v_3, v_4) est-elle une base de F ?

Exercice 3.21. Dans l'espace vectoriel $E = \mathbb{R}_3[X]$, On considère les quatre polynômes :

$$P_1(X) = 6 - X^3, \quad P_2(X) = X^3 - 2X^2 - X, \quad P_3(X) = X^2 - 3X + 1, \quad P_4(X) = X^3 - X^2 - 4.$$

a) Soit $F = \{P \in E \mid P(0) + P'(0) + P''(0) + P'''(0) = 0\}$.
Montrer que $F \neq E$ et vérifier que les quatre polynômes précédents sont dans F.

b) (P_1, P_2, P_3, P_4) est-elle une famille libre de E?

c) (P_1, P_2, P_3, P_4) est-elle une famille génératrice de E ?

d) (P_1, P_2, P_3, P_4) est-elle une base de F ?

Exercice 3.22. Dans l'espace $\mathbb{R}^4$, vérifier que les vecteurs $a_1 = (1, 2, -1, -2)$, $a_2 = (2, 3, 0, -1)$, $a_3 = (1, 3, -1, 0)$, $a_4 = (1, 2, 1, 4)$ sont linéairement indépendants et calculer les coordonnées de $b = (7, 14, -1, 2)$ dans la base (a_1, a_2, a_3, a_4).

Exercice 3.23. Dans l'espace $\mathbb{C}^3$, vérifier que les vecteurs $a_1 = (1, -1, i)$, $a_2 = (1, -1, 1)$, $a_3 = (i, 1, -1)$ forment une base et calculer les coordonnées de $b = (1+i, 1-i, i)$ dans la base (a_1, a_2, a_3).

Exercice 3.24. Comparaison de deux sous-espaces

a) Dans $\mathbb{R}^4$, on considère les quatre vecteurs : $v_1 = (1, -1, 3, 2)$, $v_2 = (3, -1, 0, 1)$, $v_3 = (1, 1, -6, -3)$, et $v_4 = (0, 2, -9, -5)$. On appelle F le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$ engendré par (v_1, v_2, v_3, v_4).

1. Déterminer la dimension de F et en donner une base.
2. Donner un système d'équations cartésiennes de F.

b) Soit $G = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \mid x_1 - x_2 + 2x_3 - 4x_4 = 0\}$. Montrer que G est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$ et donner une base de G.

c) Montrer que $F \subset G$. A-t-on $F = G$?

Exercice 3.25. Déterminer une base sur $\mathbb{R}$ pour les sous-espaces vectoriels suivants, et la compléter en une base de tout l'espace.

a) $Vect((1, 2, 1), (0, 1, 3), (2, 2, -4)) \subset \mathbb{R}^3$

b) $Vect((1, 3, 0), (2, 3, -3)) \cap Vect((1, 1, -3), (1, 4, 3)) \subset \mathbb{R}^3$

c) $\{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid 2x_1 + x_2 + x_3 = 0\} \subset \mathbb{R}^3$

Exercice 3.26. Déterminer une base sur $\mathbb{C}$ pour les sous-espaces vectoriels suivants, et la compléter en une base de tout l'espace.

a) $Vect((2+i, 1+i, i), (1+3i, 2i, -1+2i)) \subset \mathbb{C}^3$

b) $Vect((1, 0, i), (0, 1+i, 1-i)) \cap \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{C}^3 \mid (4+i)x_1 - x_2 = 0\} \subset \mathbb{C}^3$

Exercice 3.27. Montrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$, donner une base de F et sa dimension dans les cas suivants :

$$F = \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n | x_1 + x_2 + \ldots + x_n = 0\}$$

$$F = \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n | x_1 + x_n = x_2 + x_n = \ldots + x_n = x_{n-1} + x_n = 0\}$$

Exercice 3.28. Avec des paramètres

a) Déterminer, suivant les valeurs de α la dimension sur $\mathbb{R}$ du sous-espace vectoriel $Vect(a, b, c)$ où $a = (1, 1, \alpha)$, $b = (1, \alpha, 1)$, $c = (\alpha, 1, 1)$.

b) Déterminer les réels λ et μ pour que les vecteurs suivants soient dépendants et donner une relation de dépendance et la dimension de l'espace qu'ils engendrent.

$$v_1 = (3, 2, -1, 3), v_2 = (1, 0, 2, 4), v_3 = (1, -3, \lambda, \mu)$$

c) Montrer que dans $\mathbb{R}^4$ la famille de vecteurs :

$$v_1 = (1, 0, 1, 0), v_2 = (0, 1, 0, 1), v_3 = (\alpha, \beta, \gamma, \delta)$$

est de rang 3 si et seulement si $\alpha \neq \gamma$ ou $\beta \neq \delta$.

d) extrait du partiel d'avril 2000
Soient m, b_1, b_2, b_3 des réels. On considère dans $\mathbb{R}^3$ les vecteurs
$u_1 = (1, 1, 1), u_2 = (1, 2, 3), u_3 = (3, 1, m), u_4 = (b_1, b_2, b_3)$.

1. La famille (u_1, u_2, u_3, u_4) est-elle libre?
2. Déterminer l'ensemble des nombres réels m, tels que la famille (u_1, u_2, u_3) soit libre. Dans ce cas montrer sans calcul qu'il existe $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ réels tels que $u_4 = \lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \lambda_3 u_3$.
3. On suppose que la famille (u_1, u_2, u_3) est liée. Soit F le sous-espace vectoriel engendré par (u_1, u_2, u_3).
   (a) Donner une base de F. Quel est la nature géométrique de F?
   (b) Donner une condition nécessaire et suffisante portant sur b_1, b_2, b_3, pour que u_4 appartienne à F.

3.3 Choisir une base adaptée au problème

Exercice 3.29. Interpolation de Lagrange
Montrer que les polynômes : $P_1(X) = X(X-1)(X-2)$, $P_2(X) = X(X-1)(X-3)$, $P_3(X) = X(X-2)(X-3)$, $P_4(X) = (X-1)(X-2)(X-3)$ forment une base de $\mathbb{R}_3[X]$. Exprimer dans cette base le polynôme P tel que $P(0) = 3$, $P(1) = -2$, $P(2) = 5$, $P(3) = 7$.

Exercice 3.30. Soit $E = \mathbb{Q}[X]$ l'espace vectoriel des polynômes à coefficients dans $\mathbb{Q}$.
a) Démontrer que toute famille de polynômes $(P_0, P_1, \ldots, P_n, ...)$ dont le degré est égal à l'indice est une base de E.

b) En utilisant la base $P_0 = 1, P_1 = X, \ldots, P_n = (1/n!)X(X-1)\cdots(X-n+1)$, déterminer les polynômes Q tels que $Q(a) \in \mathbb{Z}$ pour tout $a \in \mathbb{Z}$.

Remarque : La base trigonométrique de l'exercice 3.16 est souvent utilisée en physique pour approcher les fonctions "naturelles" périodiques.

4 Somme et Somme directe

Exercice 4.1. Dans $\mathbb{R}^3$ muni de sa base canonique (e_1, e_2, e_3), les sous espaces E et F suivants sont-ils supplémentaires?
a) $E = \{(x, y, z) | x = y = z\}$ et $F = Vect(e_1, e_2)$

b) $E = \{(3t, 3t, t), t \in \mathbb{R}\}$ et $F = \{(2u + v, u + 2v, u), u \in \mathbb{R}, v \in \mathbb{R}\}$

c) $E = \{(2u + v, u + 2v, u + v), u \in \mathbb{R}, v \in \mathbb{R}\}$ et $F = \{(u + v, u + v, 2u), u \in \mathbb{R}, v \in \mathbb{R}\}$

Exercice 4.2. Dans $\mathbb{R}^3$ muni de sa base canonique (e_1, e_2, e_3), les sous espaces suivants sont-ils en somme directe?
$E_1 = \{(x, y, z) | z = 0\}$, $E_2 = vect(e_3)$, $E_3 = vect(e_1 + e_3, e_2 + e_3)$.

Exercice 4.3. Donner deux sous-espaces vectoriels distincts S et T de $\mathbb{R}^3$ tels que
$\mathbb{R}^3 = Vect((1, 1, 1)) \oplus S = Vect((1, 1, 1,)) \oplus T$.

Exercice 4.4. Si $\mathbb{R}^3 = F_1 \oplus F_2 \oplus F_3$ avec les F_i différents de $\{0\}$, décrire géométriquement les F_i. Même question si $\mathbb{R}^3 = F_1 \oplus F_2$.

Exercice 4.5. On désigne par E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie. Les propriétés suivantes sont-elles vraies ou fausses ?

1. Soient D_1, D_2, D_3 des droites vectorielles de $\mathbb{R}^3$ distinctes deux à deux. Alors $\mathbb{R}^3$ est somme de D_1, D_2, D_3.
2. Soient F et G des plans vectoriels de $E = \mathbb{R}^3$. Alors $E \neq F \cup G$.
3. Soient F et G des plans vectoriels de $E = \mathbb{R}^3$. Alors $E \neq F + G$.
4. Soient P_1 et P_2 des plans vectoriels de E tels que $P_1 \cap P_2 = \{0\}$. Alors $\dim(E) \geq 4$
5. Soient F et G des sous-espaces de dimension 3 de $\mathbb{R}^5$. Alors $F \cap G \neq \{0\}$.
6. Soit (e_1, e_2, e_3, e_4) la base canonique de $\mathbb{R}^4$ et $F = \mathrm{Vect}(e_1, e_3)$. Tout sous-espace supplémentaire de F contient e_2.

Exercice 4.6. Exercice II du contrôle continu 2003 (Voir les deux dernières pages)

Exercice 4.7. Soient K un corps et E un K-espace vectoriel de dimension finie n. Soit H un sous-espace vectoriel de E de dimension $n - 1$ et soit $u \in E$ et $u \notin H$.
Montrer que H et $Vect(u)$ sont supplémentaires dans E.

Exercice 4.8.
Donner deux exemples de sous-espaces vectoriels distincts de $\mathbb{R}_2[X]$, de dimension 2.
Est-il possible de les choisir supplémentaires dans $\mathbb{R}_2[X]$?

Exercice 4.9. Dans l'espace vectoriel $X = \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, on considère $E = Vect(f_1, f_2, f_3)$ où $f_1(x) = \sin x,\ f_2(x) = \cos x,\ f_3(x) = e^x$ et $F = \{f \in X | f(0) = f'(0) = f''(0) = 0\}$.
Prouver que $X = E \oplus F$.

Exercice 4.10. Soient $E = \mathcal{C}^2(\mathbb{R})$, $S = \{f \in E \,|\, f + f'' = 0\}$, $T = \{f \in \ | f(\pi) = 0\}$.

a) Montrer que S et T sont des sous-espaces vectoriels de E.

b) Donner un exemple d'une fonction f non nulle appartenant à S. De même pour T.

c) Existe-t-il une fonction f non nulle dans $S \cap T$?

d) Est-ce que $S+T$ est une somme directe ?

Exercice 4.11. Comment utiliser la somme directe pour scinder un problème en deux sous problèmes
Soit $\mathcal{E}$ l'espace vectoriel réel des fonctions deux fois dérivables de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et $\mathcal{P}$ (respectivement $\mathcal{I}$) le sous-espace formé des fonctions paires (respectivement impaires).

a) Montrer que $\mathcal{E} = \mathcal{P} \oplus \mathcal{I}$.

b) En déduire toutes les fonctions deux fois dérivables sur $\mathbb{R}$ telles que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f''(x) + f(-x) = x + x^2 + chx.$$