Université de Rennes 1
B04-Licence de mathématiques
Examen deuxième session mercredi 21 juin 2006, 10 heures 30
Durée : 2 heures

Documents autorisés

Documents manuscrits et livre du cours seuls autorisés. Calculatrice interdite.

Barème envisagé

I : 3 points ; II : 5 points ; III : 10 points ; IV : 2 points.

Indications générales

Les exercices sont indépendants. Il est demandé de citer (sans recopier leur énoncé) les résultats du cours utilisés.

Exercice I

Parmi les sous-ensembles suivants de $\mathbb{R}^3$, déterminer, en le justifiant, ceux qui sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$ et ceux qui ne le sont pas :
a) l'ensemble des (x, y, z) tels que $x + y - z = 0$ et $x + y + z = 0$;
b) l'ensemble des (x, y, z) tels que $x^2 - z^2 = 0$;
c) l'ensemble des (x, y, z) tels que $z(x^2 + y^2) = 1$.

Exercice II

1) On note $E = \mathbb{R}[X]$ l'espace des polynômes à coefficients réels.
Parmi les applications $f : E \to E$ définies ci-dessous par leurs valeurs pour les polynômes P de E, déterminer (en le justifiant) celles qui sont linéaires et celles qui ne le sont pas.
a) $f(P) = -3P + 2$;
b) $f(P) = PP'$ où P' désigne le polynôme dérivé de P ;
c) $f(P) = XP' - P$.

2) On note $F = \mathbb{R}_3[X]$ l'espace des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à 3 et $f : F \to F$ l'application définie par $f(P) = XP' - P$.

Déterminer la matrice de f par rapport à la base $(1, X, X^2, X^3)$.

3) Déterminer le noyau et l'image de f ; préciser leurs dimensions.

Exercice III

On note $B = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et $C = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$ la famille définie par les vecteurs :
$\varepsilon_1 = (1, 3, 2)$;
$\varepsilon_2 = (2, 5, 1)$;
$\varepsilon_3 = (1, 1, -3)$;
1) Montrer que C est une base de $\mathbb{R}^3$.
2) Exprimer e_1, e_2, e_3 en fonction des vecteurs de C.
3) Donner l'inverse P^{-1} de la matrice

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 5 & 1 \\ 2 & 1 & -3 \end{pmatrix}.$$

On définit l'application linéaire $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ par :
$f(e_1) = (15, 48, 32)$, $f(e_2) = (-7, -22, -14)$, $f(e_3) = (3, 9, 5)$.
4) Justifier l'existence de f.
5) Donner la matrice A de f dans la base B.
6) Calculer la matrice D de f dans la base C.
7) Déduire de la question précédente le noyau et l'image de f.
8) Exprimer D en fonction de A, P et P^{-1}.

Exercice IV

Résoudre, en fonction du paramètre réel m, le système linéaire L de deux équations à deux inconnues suivant :

$$\begin{cases} x & + & (m+1)y & = m+2 \\ mx & + & (m+4)y & = 2m+3 \end{cases}$$