Examen terminal (première session)

4 mai 2007 – Durée : 2 heures

Les documents, calculatrices et téléphones portables sont interdits.

La qualité de la rédaction sera prise en compte lors de la notation.

Le barème est donné à titre indicatif.

Question de cours [4 points]

Soit E un $\mathbb{R}$-ev, et f un endomorphisme de E. On note $\mathrm{Ker}(f)$ le noyau de f.

1. Donner la définition de $\mathrm{Ker}(f)$.
2. Montrer la proposition suivante :

$$f \text{ est injective } \Longleftrightarrow \mathrm{Ker}(f) = \{0\}.$$

3. Montrer l'équivalence suivante :

$$f \text{ est injective} \Longleftrightarrow f \circ f \text{ est injective.}$$

4. Soit H un sev de E en somme directe avec $\mathrm{Ker}(f)$.
   Montrer que la restriction de f à H, notée $f|_H$, est injective.

Exercice 1 [4 points]

Soit E le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{R}^4$.
On considère les sous-ensembles de E suivants :

$$U = \left\{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 | x + z - t = 0\right\}$$

$$V = \left\{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 | x^2 = 0\right\}$$

$$W = \left\{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 | xyzt = 0\right\}.$$

On considère également les applications h, k de E dans E données par :

$$h(x, y, z, t) = (x, y, z + 1, t)$$

$$k(x, y, z, t) = (2x - 4y + z - 4t, 2x + 2y + 2z, 3x - 3y, 2x + 3y + z + 3t).$$

1. Dire, en justifiant, si U, V et W sont des sev de E.
2. Dire, en justifiant, si h et k sont des endomorphismes de E.
3. Soit $\mathcal{B}$ la base canonique de E.
   Donner la matrice M de k dans la base $\mathcal{B}$.
   Calculer le rang de k.

Exercice 2 [12 points]

Soit E le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{R}^4$.
Soit F le sev de E défini par :

$$F = \left\{(a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4 | 2a - b + 2c + d = 0\right\}.$$

1. Montrer que $F \neq E$. En déduire que $\dim(F) \leq 3$.
2. On considère les vecteurs de E suivants :

$$u_1 = (1,-1,2,-7)$$

$$u_2 = (1,0,1,-4)$$

$$u_3 = (0,-2,3,-8).$$

   On pose $G = \mathrm{Vect}(u_1,u_2,u_3)$.
   La famille $\mathcal{U} = (u_1,u_2,u_3)$ est-elle une base de G ? Quelle est la dimension de G ?
3. Montrer que $\dim(F) = 3$. En déduire que $F = G$.
4. Soit $f : E \to E$ définie par :

$$f(x,y,z,t) = (x, -8x + 7y - 2t, 10x - 8y - z + 2t, -30x + 23y + 2z - 6t).$$

   Montrer que $\mathrm{Im}(f) \subset F$.
5. Montrer que $\mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Vect}(u_4)$, où $u_4 = (0, 2-2, 7)$.
6. Calculer le rang de f.
7. En déduire que $\mathrm{Im}(f) = F$.
8. A-t-on $\mathrm{Ker}(f) \oplus \mathrm{Im}(f) = E$?
9. On considère l'application $g : F \to F$ définie par :

$$\forall x \in F, g(x) = f(x).$$

   Donner la matrice de g dans la base $\mathcal{U}$.
10. g est-elle injective ? Surjective ? Bijective ? Justifier.
11. Soit $\mathcal{U}' = (u_1,u_2,u_3,u_4)$. Justifier le fait que $\mathcal{U}'$ est une base de E.
    Donner la matrice de f dans cette base.
12. Donner la matrice de passage P de la base canonique de E vers la base $\mathcal{U}'$.
    P est-elle inversible ? Si oui, calculer son inverse P^{-1}.
13. On note M (respectivement M') la matrice de f dans la base canonique (respectivement dans la base $\mathcal{U}'$).
    Sans calculs, donner la relation entre M', M et P.