Université de Rennes 1 ANNEE 2006-2007
Module B04

FEUILLE D'EXERCICES 3

Dans la suite $\mathsf{M}_{\mathsf{n,m}}(\mathbf{R})$ (resp. $\mathsf{M}_{\mathsf{n}}(\mathbf{R})$) désigne l'ensemble des matrices $n \times m$ (resp. $n \times n$) à coefficients réels et I_{n} la matrice identité de M_{n} .

1. Matrices

Exercice 1.1. Calculer les puissances des matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \; B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \text{ et } C = \begin{pmatrix} \cos\vartheta & \frac{1}{2}\sin\vartheta \\ -2\sin\vartheta & \cos\vartheta \end{pmatrix}.$$

Exercice 1.2. Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. Calculer $A^2 - (a+d)A + (ad-bc)\mathsf{I}_2$. En déduire une condition nécessaire et suffisante pour que A soit inversible. Calculer A^{-1}.

Exercice 1.3. Soit G le sous-ensemble de $\mathsf{M}_2(\mathbf{R})$ formé des matrices $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$.
1) Montrer que c'est un sous-espace vectoriel de dimension deux de $\mathsf{M}_2(\mathbf{R})$.
2) Montrer que G est stable pour la multiplication de matrices et que tout élément non nul de G a son inverse dans G (on pourra utiliser l'exercice précédent).

Exercice 1.4. Calculer les puissances de $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Exercice 1.5. Calculer les puissances de $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

Exercice 1.6. Soit $C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Calculer C^4, en déduire C^n pour tout n dans $\mathbf{Z}$.

Date: August 31, 2006.

Exercice 1.7. Calculer AB et BA pour les matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Exercice 1.8. Vérifier que $(AB)C = A(BC)$ pour les matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \\ -1 & 3 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 2 \\ 3 & -1 & 2 & -1 \\ 2 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Exercice 1.9. Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Vérifier que $A^4 = A$, mais $A^3 \neq \mathsf{I}_4$. A est elle inversible ?

Exercice 1.10. Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -10 \\ 1 & 1 & -5 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$. Vérifier que $A^3 - A^2 + 4A + 6\mathsf{I}_3 = 0$. En déduire que A est inversible et donner son inverse.

Exercice 1.11. Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 3 & -4 & 12 \\ 1 & -2 & 5 \end{pmatrix}$. Vérifier que $A(A - \mathsf{I}_3)(A - 2\mathsf{I}_3) = 0$. A est-elle inversible ?

Exercice 1.12. Soit $A = (a_{ij})_{1 \leq i,j \leq n}$ un élément de M_n . On appelle trace de A le réel $\mathrm{Tr}(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{i,i}$.

1) Si $X \in \mathsf{M}_{\mathsf{m,n}}(\mathbf{R})$ et $Y \in \mathsf{M}_{\mathsf{n,m}}(\mathbf{R})$ comparer $\mathrm{Tr}(XY)$ et $\mathrm{Tr}(YX)$.
2) Montrer que si A, B et C sont dans $\mathsf{M}_\mathsf{n}(\mathbf{R})$, on a $\mathrm{Tr}(ABC) = \mathrm{Tr}(BCA) = \mathrm{Tr}(CAB)$.

Exercice 1.13. Inverser les matrices suivantes :

$$A_1 = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -3 \\ 5 & -1 & -2 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \qquad A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & -4 & 5 \\ 1 & -5 & 2 \end{pmatrix}$$

$$A_3 = \begin{pmatrix} -2 & -3 & 3 \\ -3 & 3 & 5 \\ -5 & -2 & 4 \end{pmatrix} \qquad A_4 = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -4 & -2 \\ 4 & 5 & 18 & 11 \\ 3 & 6 & 17 & 7 \\ -5 & -3 & -14 & 11 \end{pmatrix}$$

$$A_5 = \begin{pmatrix} -3 & 4 & -5 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & -2 \\ 5 & 4 & -5 & 4 \\ 9 & 0 & 1 & -4 \end{pmatrix} \qquad B_n = (b_{i,j}) \text{ où } b_{i,i} = 0 \text{ et } b_{i,j} = 1 \text{ si } i \neq j$$

Exercice 1.14. Notons $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

1) Calculer A^n pour tout $n \in \mathbf{N}^*$. En déduire que A est inversible et déterminer A^{-1} et $(A^2)^{-1}$.
2) Soit F le sous-espace vectoriel de $\mathsf{M}_3(\mathbf{R})$ engendré par $\{\mathsf{I}_3, A, A^2, \dots, A^n, \dots\}$. Donner une base de F.

Exercice 1.15. Déterminer le rang des matrices suivantes :

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & -1 & 3 \\ \alpha & 3 & -2 & 0 \\ -1 & 0 & -4 & 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & \beta & 0 & \beta \\ 0 & 1 & 0 & \beta & \beta \\ 3 & 0 & \beta & 0 & \beta \\ 0 & 3 & 0 & \beta & \beta \\ 0 & 0 & 3 & 0 & \beta \end{pmatrix}$$

où α et β sont des paramètres.

Exercice 1.16. Pour quelles valeurs des paramètres a, b, c les matrices suivantes sont-elles inversibles ?

$$\begin{pmatrix} 1 & a & a^2 & a^3 \\ 0 & 1 & a & a^2 \\ 0 & 0 & 1 & a \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1+a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1+b & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1+c \end{pmatrix}$$

Calculer l'inverse si c'est possible.

Exercice 1.17. Notons S le sous-ensemble des matrices de $\mathsf{M}_2(\mathbf{R})$ défini par :

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in S \Leftrightarrow ad - bc = 1.$$

Montrer que si A et B sont deux matrices de S alors $AB \in S$.

Exercice 1.18. Soit $A = \begin{pmatrix} a & 2 & -1 & b \\ 3 & 0 & 1 & -4 \\ 5 & 4 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ où a et b désignent deux réels.
1) Montrer qu'on a $2 \leq rg\ A \leq 3$.
2) Pour quelles valeurs de a et b a-t-on $rg\ A = 2$?

Exercice 1.19. Soit

$$A = \begin{pmatrix} -4 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 5 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

1) Vérifier que $A^3 - 3A + 2\mathsf{I}_3 = 0$.
2) En déduire que A est inversible et calculer son inverse.

2. Matrices d'applications linéaires

On notera $\mathbf{R}_n[X]$ l'ensemble des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à n.

Exercice 2.1. Soit u l'application linéaire de $\mathbf{R}^4$ dans $\mathbf{R}^3$ définie par:

$$u(x, y, z, t) = (z, x + y + z - t, x + z).$$

Déterminer la matrice de u relativement aux bases canoniques de $\mathbf{R}^4$ et $\mathbf{R}^3$.

Exercice 2.2. Notons $\mathscr{B}$ la base canonique de $\mathbf{R}^3$. Soit u l'endomorphisme de $\mathbf{R}^3$ dont la matrice dans la base $\mathscr{B}$ est:

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

1) Calculer le noyau et l'image de u.
2) Quel est le rang de u?
3) Calculer la matrice de $u^2 = u \circ u$ dans la base $\mathscr{B}$ et montrer que $u^2 - 3u = 0$.
4) M est-elle inversible?

Exercice 2.3. Soit φ l'endomorphisme de $\mathbf{R}_3[X]$ défini par :

$$\varphi(P)(X) = P(X + 1).$$

1) Déterminer la matrice A de φ dans la base canonique $\{1, X, X^2, X^3\}$.
2) Montrer que A est inversible.

Exercice 2.4. Soit f l'endomorphisme de $\mathbf{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est :

$$M = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & 2 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Soient $v_1 = (1, -1, 1), v_2 = (1, 1, 0), v_3 = (-1, 1, 2)$.
1) Montrer que $\mathscr{B} = \{v_1, v_2, v_3\}$ est une base de $\mathbf{R}^3$.
2) Déterminer la matrice associée Ã f dans la base $\mathscr{B}$.
3) En déduire que f est une symétrie par rapport Ã un plan vectoriel que l'on déterminera.

Exercice 2.5. Soit φ l'application de $\mathbf{R}_3[X]$ dans $\mathbf{R}[X]$ définie par :

$$\varphi(P)(X) = P(X) - XP'(X).$$

1) Montrer que φ définit un endomorphisme de $\mathbf{R}^3$.
2) Déterminer le noyau de φ.
3) Déterminer la matrice M de φ dans la base canonique $\{1, X, X^2, X^3\}$.
4) Quel est le rang de M?

Exercice 2.6. Soit g l'application linéaire de $\mathbf{R}^3$ dans $\mathbf{R}^2$ définie par rapport aux deux bases $\{e_1, e_2, e_3\}$ et $\{f_1, f_2\}$ par la matrice :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & -3 \end{pmatrix}$$

1) On prend dans $\mathbf{R}^3$ la nouvelle base $e'_1 = e_2 + e_3, e'_2 = e_1 + e_3, e'_3 = e_1 + e_2$. Ecrire la matrice B de g quand on se place dans cette base.
2) On prend dans $\mathbf{R}^2$ la nouvelle base $f'_1 = \frac{1}{2}(f_1 + f_2), f'_2 = \frac{1}{2}(f_1 - f_2)$. Ecrire la matrice C de g par rapport aux bases $\{e'_1, e'_2, e'_3\}$ et $\{f'_1, f'_2\}$.

Exercice 2.7. Soient $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ la base canonique de $\mathbf{R}^4$ et f l'application linéaire de $\mathbf{R}^4$ dans $\mathbf{R}^3$ définie par $f(x, y, z, t) = (X, Y, Z)$ avec :

$$X = x - y + z + t, Y = x + 2z - t, Z = x + y + 3z - 3t$$

1) Quelle est la matrice de f dans les bases canoniques?
2) Montrer que $\{f(e_1), f(e_2)\}$ est une base de $\operatorname{im} f$ et la compléter en une base $\mathscr{B}$ de $\mathbf{R}^3$.
3) Montrer que $\ker f$ est de dimension 2 et donner une base $\{u_1, u_2\}$ de $\ker f$.
4) Vérifier que $\{e_1, e_2, u_1, u_2\}$ est une base de $\mathbf{R}^4$. Quelle est la matrice de f dans les bases $\{e_1, e_2, u_1, u_2\}$ et $\mathscr{B}$?

Exercice 2.8. Soit

$$\begin{array}{rccc} \phi : & \mathbf{R}_4[X] & \to & \mathbf{R}_4[X] \\ & P & \mapsto & P' \end{array}$$

1) Déterminer la matrice A de ϕ dans la base $(1, X, \frac{X^2}{2!}, \frac{X^3}{3!}, \frac{X^4}{4!})$.
2) Que vaut A^5?

Exercice 2.9. Soit u l'application définie sur $\mathbf{R}_4[X]$ par :

$$u(P) = X^2P^{''}(X) - 3XP^{'}(X).$$

1) Montrer que u est une application linéaire de $\mathbf{R}_4[X]$ dans $\mathbf{R}_4[X]$. Donner la matrice de u dans la base canonique de $\mathbf{R}_4[X]$.
2) Déterminer $\ker u$ et $\operatorname{im} u$. En donner des bases et les dimensions.
3) L'équation $u(P) = 1$ a-t-elle une solution dans $\mathbf{R}_4[X]$? Donner une solution de l'équation $u(P) = X^3$. Si P_1 et P_2 sont deux solutions de cette équation, que peut-on dire de $P_1 - P_2$? Donner toutes les solutions de l'équation $u(P) = X^3$.

Exercice 2.10. Dans $\mathscr{C}^\infty(\mathbf{R}, \mathbf{R})$ on considère le sous espace vectoriel $E=$ Vect$(f_1,\ f_2,\ f_3, f_4)$ où :

$$f_1(x) = sin^3x, f_2(x) = sin^2xcosx, f_3(x) = sinxcos^2x \text{ et } f_4(x) = cos^3x.$$

1) Montrer que $\{f_1, f_2, f_3, f_4\}$ est une base de E.
2) Montrer que $(f_1^{'}, f_2^{'}, f_3^{'}, f_4^{'}) \subset E$. En d'eduire que l'application :

$$\begin{array}{rccc} D: & E & \rightarrow & E \\ & f & \mapsto & f' \end{array}$$

est par conséquent un endomorphisme de E. Donner la matrice M de D dans la base $\{f_1, f_2, f_3, f_4\}$.
3) Montrer que D est un automorphisme de E et calculer M^{-1}.
4) Soient $g_1(x) = sinx, g_2(x) = cosx, g_3(x) = sin3x, g_4(x) = cos3x$. Montrer que $\{g_1, g_2, g_3, g_4\}$ est une base de E.
5) Quelle est la matrice N de D dans cette dernière base ?

Exercice 2.11. Soient $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ et :

$$\begin{array}{rccc} \psi: & \mathsf{M}_2(\mathbf{R}) & \rightarrow & \mathsf{M}_2(\mathbf{R}) \\ & M & \mapsto & AM - MA \end{array}$$

1) Montrer que ψ est linéaire. Calculer $\psi\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right)$. Déterminer une base de $\ker \psi$ et une base de $\operatorname{im} \psi$.
2) Donner la matrice K de ψ dans la base canonique de $\mathsf{M}_2(\mathbf{R})$.
3) Trouver une base de $\mathsf{M}_2(\mathbf{R})$ dans laquelle la matrice de ψ soit :

$$L = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Exercice 2.12. Notons $\{e_1, e_2, e_3\}$ la base canonique de $\mathbf{R}^3$. Soient $\varepsilon_1 = (1, 1, 1)$ et $\varepsilon_2 = (1, 2, 1)$.
1) Vérifier que les vecteurs $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ et e_1 forment une base de $\mathbf{R}^3$.
2) Soit f l'application linéaire définie de $\mathbf{R}^3$ dans $\mathbf{R}^3$ par :

$$f(\varepsilon_1) = \varepsilon_2,\ f(\varepsilon_2) = \varepsilon_2, f(e_1) = e_1 + e_2.$$

Donner la matrice de f dans la base canonique de $\mathbf{R}^3$.

3) Calculer la matrice de f dans la base $\{\varepsilon_1, \varepsilon_2, e_1\}$.

Exercice 2.13. Soit $f : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ l'application linéaire définie par :

$$f(x, y, z) = (x + y, 2x - y + z, x + z).$$

1) Ecrire la matrice de f dans la base canonique de $\mathbf{R}^3$.
2) Montrer que les vecteurs $v_1 = (2, 1, -1)$, $v_2 = (2, -1, 2)$ et $v_3 = (3, 0, 1)$ forment une base de $\mathbf{R}^3$. Donner la matrice de f dans la base $\{v_1, v_2, v_3\}$.

Exercice 2.14. Considérons l'espace vectoriel $\mathbf{R}^n$; notons $\{e_1, \dots, e_n\}$ sa base canonique et v le vecteur défini par $v = e_1 + \dots + e_n$. Soit $f : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ l'application linéaire définie, pour $i = 1, \dots, n$, par $f(e_i) = e_i + v$.
1) Montrer que tout vecteur de $\ker f$ est colinéaire à v et, en fait, égal à 0.
2) Montrer que f est un isomorphisme.
3) Ecrire la matrice de f dans la base canonique de $\mathbf{R}^n$.

Exercice 2.15. Soit $f : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ une application linéaire. Posons $g = f - \mathsf{id}$; supposons que $g \circ g \neq 0$ et que $g \circ g \circ g = 0$.
1) Soit v dans $\mathbf{R}^3$ tel que $g \circ g(v) \neq 0$. Montrer que les vecteurs v, $g(v)$ et $g \circ g(v)$ forment une base de $\mathbf{R}^3$.
2) Donner la matrice de g puis la matrice de f dans la base $\{v, g(v), g \circ g(v)\}$.
3) Supposons maintenant que f est l'application linéaire dont la matrice dans la base canonique de $\mathbf{R}^3$ est :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Posons $v = (1, 0, 0)$. Montrer que f et v vérifient les conditions énoncées en 1). Ecrire la matrice de f dans la base $\{v, g(v), g \circ g(v)\}$.

Exercice 2.16. Soient $\{e_1, e_2, e_3\}$ la base canonique de $\mathbf{R}^3$ et $f : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ l'application linéaire définie par :

$$f(x, y, z) = (-x + y + z, -2x + y + z, -6x + 2y + 4z).$$

1) Ecrire la matrice de f dans la base canonique de $\mathbf{R}^3$.
2) Considérons les vecteurs $v_1 = (1, 0, 2)$, $v_2 = (1, 1, 2)$ et $v_3 = (2, 1, 5)$ de $\mathbf{R}^3$. Montrer que $\{v_1, v_2, v_3\}$ est une base de $\mathbf{R}^3$ et calculer la matrice de f dans cette base.

Exercice 2.17. Soient E un $\mathbf{R}$-espace vectoriel de dimension 3 et $\{e_1, e_2, e_3\}$ une base de E. Notons $f : E \to E$ l'application linéaire dont la matrice dans la base $\{e_1, e_2, e_3\}$ est :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 4 & 1 & -2 \\ 6 & 3 & -4 \end{pmatrix}.$$

1) Trouver une base de $\ker f$.
2) Posons $v_1 = e_1 + 2e_2 + 3e_3$, $v_2 = e_2 + e_3$ et $v_3 = e_1 + 2e_3$. Montrer que $\{v_1, v_2, v_3\}$ est une base de E. Calculer la matrice de f dans cette base.
3) En déduire que l'on a $f \circ f = -f$.

Exercice 2.18. Notons $\mathscr{B} = \{e_1, e_2, e_3\}$ la base canonique de $\mathbf{R}^3$. Soit $f : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ l'unique application linéaire telle que :

$$f(e_1) = -e_1 + e_2 + e_3,\ f(e_2) = -2e_1 + 2e_3 \text{ et } f(e_3) = -4e_1 + e_2 + 4e_3.$$

1) Ecrire la matrice de f dans la base $\mathscr{B}$.
2) Donner une base de $\operatorname{im} f$ et une équation de $\operatorname{im} f$.
3) Pour quelles valeurs du paramètre réel t l'application linéaire $f - t\mathsf{id}$ est-elle un isomorphisme ?
4) Trouver une base v_1 de $\ker(f - 3\mathsf{id})$ et une base v_2 de $\ker f$. Montrer que les vecteurs v_1 et v_2 sont linéairement indépendants. Trouver v_3 dans $\mathbf{R}^3$ tel que $\{v_1, v_2, v_3\}$ soit une base de $\mathbf{R}^3$. Quelle est la matrice de f dans la base $\{v_1, v_2, v_3\}$?

Exercice 2.19. Soient E un k-espace vectoriel de dimension 3 et $\mathscr{B} = \{e_1, e_2, e_3\}$ une base de E. Notons f l'application linéaire de E dans E dont la matrice dans la base $\mathscr{B}$ est :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

1) Ecrire la matrice de f dans la base (e_3, e_2, e_1).
2) Ecrire la matrice de f dans la base $(e_1 + e_3, e_3, e_2 - e_3)$.

Exercice 2.20. Dans l'espace vectoriel $\mathbf{R}^3$ muni de sa base canonique $\{e_1, e_2, e_3\}$, on considère l'endomorphisme u défini par :

$$u(e_1) = 2e_1 - 3e_2 + e_3, u(e_2) = e_1 - e_2 \text{ et } u(e_3) = e_2 - e_3.$$

1) Ecrire la matrice M de u dans la base canonique. Calculer M^2 et vérifier que $M^3 = 0$.
2) Déterminer $\ker u$, $\ker u^2$, $\operatorname{im} u$, $\operatorname{im} u^2$ et donner les relations d'inclusion entre ces sous-espaces.
3) On pose $e'_1 = u^2(e_1), e'_2 = -u(e_3), e'_3 = e_3$. Montrer que $\{e'_1, e'_2, e'_3\}$ est une base de $\mathbf{R}^3$. Donner la matrice N de u dans cette base.
4) Soit S la matrice de passage de $\{e_1, e_2, e_3\}$ à $\{e'_1, e'_2, e'_3\}$. Calculer S^2 et en déduire S^{-1}. Vérifier que $S^{-1}MS = N$.

3. Espace dual

Exercice 3.1. Soient ℓ_1, ℓ_2, ℓ_3 : $\mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}$ les formes linéaires définies par $\ell_1(x, y, z) = x+y+3z$, $\ell_2(x, y, z) = 5x - y + z$ et $\ell_3(x, y, z) = x - y - z$ pour tout (x, y, z) dans $\mathbf{R}^3$.
1) Montrer que (ℓ_1, ℓ_2, ℓ_3) est une base de l'espace dual $(\mathbf{R}^3)^*$.
2) Trouver la base (u_1, u_2, u_3) de $\mathbf{R}^3$ dont la base duale est (ℓ_1, ℓ_2, ℓ_3).

Exercice 3.2. Soient ℓ_1, ℓ_2, ℓ_3, ℓ_4 : $\mathbf{R}^4 \to \mathbf{R}$ les formes linéaires définies par $\ell_1(x, y, z, t) = x + y - z + 2t$, $\ell_2(x, y, z, t) = x + z$, $\ell_3(x, y, z, t) = x + y + z + t$ et $\ell_4(x, y, z, t) = t$ pour tout (x, y, z, t) dans $\mathbf{R}^4$.
1) Montrer que $(\ell_1, \ell_2, \ell_3, \ell_4)$ est une base de l'espace dual $(\mathbf{R}^4)^*$.
2) Trouver la base (u_1, u_2, u_3, u_4) de $\mathbf{R}^4$ dont la base duale est $(\ell_1, \ell_2, \ell_3, \ell_4)$.

Exercice 3.3. Soient ℓ_1, ℓ_2, ℓ_3, ℓ_4 : $\mathbf{R}^4 \to \mathbf{R}$ les formes linéaires définies par $\ell_1(x,y,z,t) = x - y + 2z + 3t$, $\ell_2(x,y,z,t) = y + z + t$, $\ell_3(x,y,z,t) = z + t$ et $\ell_4(x,y,z,t) = 2z + 3t$ pour tout (x,y,z,t) dans $\mathbf{R}^4$.
1) Montrer que $(\ell_1,\ell_2,\ell_3,\ell_4)$ est une base de l'espace dual $(\mathbf{R}^4)^*$.
2) Trouver la base (u_1,u_2,u_3,u_4) de $\mathbf{R}^4$ dont la base duale est $(\ell_1,\ell_2,\ell_3,\ell_4)$.

Exercice 3.4. Soient $E = \mathbf{R}_2[X]$ et a et b des réels distincts et non nuls.
1) Les formes :

$$y_1^* : P \mapsto P(a),\ y_2^* : P \mapsto P(b),\ y_3^* : P \mapsto P(0)$$

sont-elles linéairement indépendantes ?
2) Même question pour les formes :

$$z_1^* : P \mapsto P'(a),\ z_2^* : P \mapsto P'(b),\ z_3^* : P \mapsto P'(0).$$

3) Etudier ensuite le cas où $E = \mathbf{R}_3[X]$.

Exercice 3.5. Soient a, b deux réels tels que $a < b$. Montrer qu'il existe trois réels α, β et γ tels que $\int_a^b P(t)\,dt = \alpha P(a) + \beta P\left(\frac{a+b}{2}\right) + \gamma P(b)$ pour tout polynôme P de $\mathbf{R}_2[X]$. Calculer ces nombres α, β et γ.

Exercice 3.6. Soit $\mathscr{D}$ la droite d'équation :

$$\begin{cases} x - 2y + z = 4 \\ x + 3y - z = -3 \end{cases}$$

Montrer qu'il existe un unique plan de $\mathbf{R}^3$ contenant la droite $\mathscr{D}$ et dont la direction contient le vecteur $(2,1,1)$. Trouver une équation de ce plan.

Exercice 3.7. Soit F le sous-espace vectoriel de $\mathbf{R}^4$ engendré par les vecteurs $(1,1,1,1)$, $(1,3,0,4)$, $(-2,4,-5,7)$ et $(-4,0,-6,2)$. Trouver une base de l'orthogonal de F dans $(\mathbf{R}^4)^*$.