
TER**Analyse de formes et problème de Procrustes**

L'analyse de Procruste est une branche de l'analyse de formes. Il s'agit, étant données deux figures, de déterminer si elles sont identiques. Évidemment, on s'autorise à les translater, et à les réduire à la même taille. Une troisième transformation est naturelle : leur faire subir une rotation pour pouvoir les superposer.

Considérons que les objets soient représentés par un nombre fini k de points en n dimensions (on peut penser aux empreintes digitales). Après translation et homothétie (pour les « centrer » et les « réduire à la même taille »), on peut les représenter par des matrices de $\mathcal{M}_{k,n}(\mathbb{R})$.

Le problème de Procruste est le suivant : à quel point une matrice $A \in \mathcal{M}_{k,n}(\mathbb{R})$ peut être approchée par une matrice $B \in \mathcal{M}_{k,n}(\mathbb{R})$ multipliée par une matrice orthogonale $Q \in \mathcal{O}_k(\mathbb{R})$ (représentant une rotation) ? En langage mathématique, on cherche donc à minimiser la norme :

$$\|A - QB\|_F \text{ sous la contrainte } {}^tQQ = I,$$

où $\|\cdot\|_F$ désigne la norme de Frobenius.

On peut montrer que la solution est donnée par la décomposition en valeurs singulières (SVD) de A^tB .

Le but de ce travail est la résolution du problème de Procruste, avec implémentation sur ordinateur. On pourra considérer des exemples simples de formes à comparer (ex : une signature, etc).