Fiche 1 : Dérivée

Calcul de dérivée, étude de fonctions, recherche d'extremum, théorème des accroissements finis.

1. Etudier le sens de variation des fonctions f et g définies sur $[0, \pi/2[$ par
$$f(x) = \tan(x) - x$$
$$g(x) = \tan(x) - x - x^3/3.$$
En déduire que l'on a $\tan(x) > x + x^3/3$ si $x \in]0, \pi/2[$.

2. (a) Montrer que si $x \in]0, \pi[$, on a $x \cos x - \sin x$.
   (b) Etudier le sens de variation de la fonction $x \mapsto \dfrac{\sin x}{x}$ sur l'intervalle $]0, \pi]$.
   (c) Soient a et b des réels tels que $0 < a < b < \pi$. Montrer que l'on a :
$$\frac{b}{a} < \frac{\sin a}{\sin b}.$$

3. Soit $p \in \mathbb{N}$.
   (a) Montrer que la fonction f définie sur $\mathbb{R}^+$ par
$$\forall x \geq 0, \quad f(x) = \frac{(1+x)^p}{1+x^p}$$
   a pour maximum 2^{p-1}.
   (b) Soient $a, b \in \mathbb{R}^{+*}$. Montrer que l'on a
$$(a+b)^p \leq 2^{p-1}(a^p + b^p).$$

4. (a) Montrer que pour tout nombre $x > 0$, on a les inégalités :
$$\frac{1}{x+1} < \ln(x+1) - \ln(x) > \frac{1}{x}.$$
   (b) En déduire que pour tout entier $n \geq 1$, on a
$$\ln(n+1) < 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} < 1 + \ln(n).$$
   (c) Posons $u_n = 1 + \dfrac{1}{2} + \cdots + \dfrac{1}{n} - \ln(n)$. Montrer que la suite (u_n) est décroissante et convergente.

5. $\boxed{\text{Devoir maison}}$ Soient x, y des réels tels que $-\pi/4 \leq x < y \leq \pi/4$. Montrer que l'on a
$$|x - y| \leq |\tan x - \tan y| \leq 2|x - y|.$$

6. $\boxed{\text{Pour aller plus loin}}$ Soit $n \geq 2$ un entier, $a, b \in R^{+*}$ des réels strictement positifs et P le polynôme
$$P = X^n + aX + b$$
Combien P' a-t-il de racines réelles ?