
Fiche 2 : Dérivée

Convexité

1. Montrer les inégalités suivantes :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \exp(x) \geq 1 + x \quad (1)$$

$$\forall x \in \mathbb{R}^{+*}, \ln(x) \leq x - 1 \quad (2)$$

$$\forall x \in]0, \pi/2[, 2x/\pi \leq \sin(x) \leq x. \quad (3)$$

2. (a) Quel est le domaine de définition de la fonction $x \mapsto \ln(\ln(x))$?
(b) Montrer que cette fonction est concave.
(c) En déduire que si $x, y > 1$, on a l'inégalité

$$\ln \frac{x+y}{2} \geq \sqrt{\ln x \ln y}.$$

3. (a) Montrer que la fonction f définie sur $]0, \pi[$ par $f(x) = \ln(1 + \cos x)$ est concave.
(b) En déduire que l'on a : $\forall x \in]0, \pi[, f(x) \leq \pi/2 - x$.