
Fiche 3 : Formules de Taylor

1. Formule de Taylor-Lagrange

Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction n fois dérivable sur $[a, b]$ et $(n+1)$ fois dérivable sur $]a, b[$.
On considère la fonction g définie sur $[a, b]$ par

$$g(x) = f(b) - \frac{(b-x)^{n+1}}{(n+1)!} A - \sum_{k=0}^n \frac{(b-x)^k}{k!} f^{(k)}(x),$$

où A est choisi tel que $g(a) = 0$.

- (a) Que vaut A ?
 - (b) Montrer que g est continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$.
 - (c) En déduire l'existence d'un $c \in]a, b[$ tel que $g'(c) = 0$.
 - (d) Calculer la dérivée $g'(x)$.
 - (e) En déduire que $A = f^{(n+1)}(c)$.
 - (f) En déduire la formule de Taylor-Lagrange pour f .
2. Soit $x \in \mathbb{R}$. Montrer que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{x}{1!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} \right) = e^x.$$

3. Ecrire la formule de Taylor-Young de la fonction $\cos$ au voisinage de 0 à l'ordre 6
4. Montrer que pour tout $x > 0$, on a :

$$\frac{3}{2}\sqrt{x} + \frac{3}{8\sqrt{x+1}} \leq (x+1)^{3/2} - x^{3/2} \leq \frac{3}{2}\sqrt{x} + \frac{3}{8\sqrt{x}}.$$