Fiche 4 : Développements limités

Développements limités usuels, calculs de développements limités.

Développements limités usuels (en 0)

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n)$$

$$\text{ch } x = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \dots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n+1})$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \dots + (-1)^n . \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n+1})$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots + (-1)^n . \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+2})$$

$$\tan x = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2}{15}x^5 + \frac{17}{315}x^7 + o(x^8)$$

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \dots + \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n + o(x^n)$$

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 + \dots + (-1)^n x^n + o(x^n)$$

$$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{x}{2} - \frac{1}{8}x^2 + \dots + (-1)^{n-1} . \frac{1.1.3.5\dots(2n-3)}{2^n n!}x^n + o(x^n)$$

$$\frac{1}{\sqrt{1+x}} = 1 - \frac{x}{2} + \frac{3}{8}x^2 + \dots + (-1)^n . \frac{1.3.5\dots(2n-1)}{2^n n!}x^n + o(x^n)$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \dots + (-1)^{n-1} . \frac{x^n}{n} + o(x^n)$$

$$\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \dots + (-1)^n . \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + o(x^{2n+2})$$

$$\arcsin x = x + \frac{1}{2}\frac{x^3}{3} + \frac{3}{8}\frac{x^5}{5} + \dots + \frac{1.3.5\dots(2n-1)}{2^n n!}\frac{x^{2n+1}}{2n+1} + o(x^{2n+2})$$

1. **[Deux fonctions différentes avec le même $DL_n(0)$]**
   Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par :

$$f(x) = \begin{cases} \exp(-1/x) \text{ si } x > 0 \\ 0 \text{ sinon.} \end{cases}$$

   (a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f^{(n)}(0) = 0$ (admis).
   (b) En déduire le $DL_n(0)$ de f pour tout n.
   (c) Que peut-on en conclure ?

2. **[Une fonction admettant un $DL_2(0)$ non dérivable en 0]**
   Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par :

$$f(x) = \begin{cases} x^3 \sin(1/x) \text{ si } x \neq 0 \\ 0 \text{ si } x = 0. \end{cases}$$

   (a) Montrer que f est continue en 0.
   (b) Montrer que $f = o(x^2)$.
   (c) Montrer que f n'est pas deux fois dérivable en 0.
   (d) Que peut-on en conclure ?

3. Ecrire les développements limités suivants :
   (a) $DL_3(1)$ de $\ln(x)$.
   (b) $DL_3(0)$ de $\exp(x-1)$.
   (c) $DL_3(-1)$ de $\exp(x)$.
   (d) $DL_3(0)$ de $\dfrac{1}{1+x/2}$.
   (e) $DL_3(2)$ de $1/x$.
   (f) $DL_2(0)$ de $\sqrt{1+x/4}$.
   (g) $DL_2(4)$ de $\sqrt{x}$.
   (h) $DL_3(0)$ de $\tan(x)$.

4. Ecrire les développements limités à l'ordre $n \in \mathbb{N}$ en 0 des fonctions suivantes :
   (a) arctan.
   (b) ch.

5. $\boxed{\text{Devoir maison}}$ Donner le $DL_n(0)$ de arcsin.