Nombres complexes

DM à rendre pour jeudi 24 septembre

1. Formule du binôme de Newton

Soit n un entier naturel. En calculant $(a + b)^n$ pour des réels a, b bien choisis, calculer les sommes suivantes :

(a) $S_1 = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k}$.

(b) $S_2 = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-1)^k$.

(c) $S_3 = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} 2^k$.

2. Forme trigonométrique d'un nombre complexe

(a) Démontrer les égalités suivantes, valables pour tout réel θ :

$$e^{i\theta} + 1 = 2 \cos(\theta/2) e^{i\theta/2} \quad \text{et} \quad e^{i\theta} - 1 = 2i \sin(\theta/2) e^{i\theta/2}.$$

Indication : On pourra commencer par montrer que $e^{i\theta} + 1 = e^{i\frac{\theta}{2}} (e^{i\frac{\theta}{2}} + e^{-i\frac{\theta}{2}})$.

(b) En déduire le module et l'argument de $(1 + \cos \theta + i \sin \theta)^n$ ($\theta \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}^*$).

3. (a) Rappeler la valeur de $\cos \pi/4$ et $\sin \pi/4$.

(b) En déduire la valeur de $\cos^2 \pi/8$ et $\sin^2 \pi/8$.

(c) Montrer que $\cos \pi/8 > 0$ et $\sin \pi/8 > 0$.

(d) En déduire que $\cos \pi/8 = \frac{\sqrt{2 + \sqrt{2}}}{2}$ et $\sin \pi/8 = \frac{\sqrt{2 - \sqrt{2}}}{2}$.

(e) (★) En déduire que $\left(\sqrt{2 + \sqrt{2}} + i\sqrt{2 - \sqrt{2}}\right)^8 = -256$.