DS n°2 : Fonctions usuelles ; nombres complexes

Durée : 4 heures **Documents et calculatrices interdits**

Problème On considère les deux fonctions f et g définies par

$$f(x) = \frac{1}{2}\arctan(\text{sh}x) \text{ et } g(x) = \arctan\left(\frac{\text{sh}x}{1+\text{ch}x}\right).$$

Le but du problème est de montrer, par deux méthodes différentes, que $f = g$.

1) Première méthode (utilisant les dérivées)

a) **Question de cours** : rappeler la relation liant ch^2x et sh^2x pour tout réel x.

b) Préciser et justifier le domaine de définition de f et de g.

c) Préciser les points où f est dérivable et montrer que $f' = \dfrac{1}{2\,\text{ch}}$.

d) Faire de même avec la fonction g. On justifiera le calcul efffectué.

e) En déduire que $f = g$.

2) Deuxième méthode (trigonométrique)

a) Donner un exemple de deux réels **distincts** avec $a \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ et $b \in]-\pi, \pi[$ et tels que $\tan a = \tan b$.

b) Montrer que pour tout réel x, $f(x) \in \left]-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right[$.

En déduire que pour tout réel x, $\tan(2f(x)) = \text{sh}(x)$.

On considère maintenant la fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = \left(\dfrac{\text{sh}x}{1+\text{ch}x}\right)$.

c) En étudiant la fonction h (variations, limites...), montrer que $h(x) \in]-1, 1[$ pour tout réel x.

d) En déduire que pour tout réel x, $g(x) \in \left]-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right[$.

e) Montrer que pour tout $\theta \in \left]-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right[$, on a : $\tan(2\theta) = \dfrac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta}$.

f) En déduire que pour tout réel x, $\tan(2g(x)) = \text{sh}(x)$.

g) En déduire que $f = g$ (on pourra méditer sur la question a).

3) Une application de l'égalité entre f et g.

a) En utilisant la définition de ch et sh, donner une expression simple de $\text{ch}\left(\dfrac{\ln 3}{2}\right)$ et de $\text{sh}\left(\dfrac{\ln 3}{2}\right)$.

b) En utilisant l'égalité $f(x) = g(x)$ pour $x = \dfrac{\ln 3}{2}$, la tangente de quel angle peut-on déduire ?

$\boxed{\textbf{Exercice 1}}$ On définit le polynôme $P(X) = \dfrac{1}{2i}\left((X+i)^5 - (X-i)^5\right)$.

1) **Question de cours** : donner la définition et l'expression des racines $5^{\text{ièmes}}$ de l'unité.

2) A l'aide de ces racines $5^{\text{ièmes}}$ de l'unité, déterminer les racines du polynôme P.
Vérifier qu'elles sont toutes réelles.

3) Vérifier que le polynôme P peut s'écrire sous la forme $P(X) = aX^4 + bX^2 + c$ avec a, b et c des réels que l'on calculera. Rechercher les racines de P par une autre méthode qu'à la question précédente.

4) Comparer les résultats obtenus aux questions 2 et 3 pour en déduire des résultats précédents les valeurs exactes de $\tan\left(\frac{\pi}{5}\right)$ et $\tan\left(\frac{2\pi}{5}\right)$.

$\boxed{\textbf{Exercice 2}}$ Dans le plan complexe rapporté au repère orthonormal $(O;\vec{i},\vec{j})$, on considère la fonction qui, à tout point M d'affixe z $(z \neq 2i)$, associe le point M' d'affixe z' donnée par

$$z' = \frac{z - 3 + i}{2i - z}\ .$$

1) Quel est l'ensemble des points M tels que M' soit sur l'axe réel ?

2) Quel est l'ensemble des points M tels que $\arg(z') = 3\pi/2\ [2\pi]$?

3) Quel est l'ensemble des points M tels que $|z'| = 2$? Représenter graphiquement (sur un même schéma) ces trois ensembles.

$\boxed{\textbf{Exercice 3}}$ **1)** Donner une preuve géométrique (sans calcul !) de l'équivalence suivante :

$$z \in \mathbb{R} \Longleftrightarrow \left|\frac{z-i}{z+i}\right| = 1.$$

2) Soient A, B, C, D quatre points distincts du plan, d'affixes a, b, c, d. On suppose que

$$a + ib = c + id \qquad \text{et} \qquad a + c = b + d\ .$$

Montrer que le quadrilatère $ABCD$ est un carré (*penser aux propriétés des diagonales* $[AC]$ *et* $[BD]$).

3) On suppose de plus que C et D sont à coordonnées entières (*càd* que leurs parties réelles et imaginaires sont des nombres entiers relatifs).
Montrer que A et B le sont aussi.