Nombres complexes

Fiche 1

1. Donner l'écriture cartésienne des nombres complexes suivants :

(a) $\left(\frac{1}{3} - 2i\right)\left(\frac{1}{2} + \frac{i}{2}\right)$

(b) $(1 - 2i)^2$

(c) $\frac{2 - i}{1 + i}$

2. Montrer que l'ensemble $S = \{n \in \mathbb{N} \mid \exists(a, b) \in \mathbb{Z}^2, n = a^2 + b^2\}$ est stable par multiplication.

3. Donner un exemple de produit dans $\mathbb{R}^3$ non commutatif et non associatif.

4. Établir l'égalité suivante :

$$\forall(z, z') \in \mathbb{C}^2, |z + z'|^2 + |z - z'|^2 = 2(|z|^2 + |z'|^2).$$

En donner une interprétation géométrique.

5. Montrer que :

$$\forall(u, v) \in \mathbb{U}^2, (2 + uv \in \mathbb{U} \Rightarrow uv = -1).$$

6. Démontrer la formule de Moivre :

$$\forall\theta \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}, (e^{i\theta})^n = e^{in\theta}.$$

7. Calculer la somme $1 + z + \dots + z^n$ pour z dans $\mathbb{C}$ et n dans $\mathbb{N}^*$.

8. Démontrer les égalités suivantes, valables pour tout réel θ :

$$e^{i\theta} + 1 = 2 \cos(\theta/2)e^{i\theta/2} \quad \text{et} \quad e^{i\theta} - 1 = 2i \sin(\theta/2)e^{i\theta/2}.$$

9. Soient n un entier naturel et θ un réel non multiple de 2π .

- (a) Montrer que :

$$\sum_{k=0}^n e^{ik\theta} = e^{in\theta/2} \frac{\sin \frac{(n+1)\theta}{2}}{\sin \frac{\theta}{2}}.$$

- (b) En déduire la valeur de $\sum_{k=0}^n \cos k\theta$ et de $\sum_{k=0}^n \sin k\theta$.

10. Calculer la longueur d'un côté d'un polygone régulier à n sommets inscrit dans le cercle unité ($n \geq 3$).

Indication : On pourra calculer les affixes de deux sommets consécutifs bien choisis.