Nombres complexes

Fiche 2

1. **Écritures algébrique et trigonométrique**
   (a) Donner l'écriture algébrique du $\dfrac{2+\bar{z}}{1-\bar{z}}$ pour tout complexe $z \neq 1$.
   (b) Calculer $(1+i\sqrt{3})^9$.
2. **Relations coefficients/racines d'un trinôme**
   (a) On considère les racines $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ du trinôme $az^2+bz+c \quad (a,b,c \in \mathbb{C}, a \neq 0)$.
   Exprimer $S = z_1+z_2$ et $P = z_1 z_2$ en fonction de a, b, c.
   (b) Résoudre dans $\mathbb{C}^2$ les systèmes suivants :
   $$(S_1) : \begin{cases} z_1+z_2 = -i \\ z_1 z_2 = 5-5i \end{cases} \qquad \text{et} \qquad (S_2) : \begin{cases} z_1+z_2 = i \\ z_1 z_2 = 1-3i. \end{cases}$$
3. **Une équation de degré** 3
   On considère le polynôme $P(x) = x^3 - 6x^2 + 13x - 10$.
   (a) Calculer $P(2)$, et en déduire une factorisation de $P(x)$.
   (b) Calculer les racines complexes de $P(x)$.
4. **Une équation de degré** 4
   Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation suivante : $z^4 - (5-14i)z^2 - 2(5i+12) = 0$.
5. **Une équation de degré** 5
   Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $\left(\dfrac{z+1}{z-1}\right)^5 = e^{i\theta}$ pour $\theta \in [0, 2\pi[$.
6. **Inversion de pôle O et de puissance** 1
   Soit z un complexe, et M le point du plan d'affixe z.
   Comment construire à la règle et au compas le point M' d'affixe $1/z$?
7. **Un lieu géométrique du collège**
   Soient $A(a)$ et $B(b)$ deux points du plan.
   Quel est le lieu des points d'affixe z vérifiant $|z-a| = |z-b|$?
8. **Une équation classique**
   (a) Soient $a, b \in \mathbb{C}$ deux complexes distincts $(a \neq b)$ et $n \geq 2$ un entier.
   Résoudre l'équation $(z-a)^n = (z-b)^n$.
   (b) En déduire que les solutions sont les affixes de points alignés.
   Indication : On pourra utiliser l'exercice précédent.
9. **Triangle équilatéral**
   Soient $A(a), B(b), C(c)$ trois points du plan.
   Montrer que le triangle ABC est équilatéral si et seulement si j ou $\bar{j}$ est solution de l'"équation $az^2+bz+c=0$.

10. **Lieux géométriques**

    Pour $z \neq 1$, on pose $f(z) = \dfrac{z+i}{z-1}$.

    (a) Donner l'écriture algébrique de $f(z)$ en fonction de celle de z.

    (b) Déterminer l'ensemble des points $M(z)$ tels que :

    $$(i)\ f(z) \in \mathbb{R} \qquad (ii)\ f(z) \in i\mathbb{R} \qquad (iii)\ |f(z)| = 1.$$

    (c) Déterminer les points fixes de f, *i.e.* les complexes z tels que $f(z) = z$.

    (d) Soit $\alpha \in \mathbb{C}$. Résoudre l'équation $f(z) = \alpha$. Interprétation ?

11. **Théorème de l'angle au centre**

    Soit $A(1), B(b)$ et $M(z)$ trois points du plan, distincts et appartenant au cercle unité. On note α l'angle $(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB})$ et θ l'angle $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB})$.
    Montrer que $\theta = 2\alpha\ [2\pi]$.

12. **Étude d'une similitude directe**

    Étudier la similitude directe qui envoie $A(1,2)$ sur $A'(0,-3)$ et $B(3,-1)$ sur $B'(1,1)$.

13. **Une transformation du plan**

    Soit h l'homothétie de centre $A(3,-1)$ et de rapport $-\sqrt{2}$, r la rotation de centre $B(0,2)$ et d'angle $3\pi/4$, et t la translation de vecteur $\overrightarrow{BO}$. On considère l'application composée $s = t \circ r \circ h$.
    Déterminer le point Ω tel que $s(\Omega) = 0$.

14. **Une rotation du plan**

    Soit r la rotation de centre 0 et d'angle $\pi/4$.

    (a) Donner la représentation complexe de r.

    (b) Déterminer l'affixe b du point B, image de $A(\sqrt{3} - i)$ par r, sous forme algébrique, puis sous forme trigonométrique.

    (c) En déduire les valeurs exactes de $\cos \pi/12$ et de $\sin \pi/12$.