Sujet 1

(a) Définition d'une isométrie du plan.

(b) Dans le plan complexe rapporté au repère orthonormal $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$, on considère la fonction qui, à tout point M d'affixe $z \neq 2i$ associe le point M' d'affixe z' donnée par :

$$z' = \frac{z-3+i}{2i-z}\ .$$

i. Quel est l'ensemble des points M tels que M' soit sur l'axe réel ?

ii. Quel est l'ensemble des points M tels que $\arg(z') = \pi/2\ [\pi]$?

iii. Quel est l'ensemble des points M tels que $|z'| = 1$?

Sujet 2

(a) Définition d'une similitude du plan.

(b) Le plan est rapporté à un repère orthonormal direct $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$.

i. Calculer le module et l'argument du nombre complexe $a = \sqrt{3} - i$. On note A sont image.

ii. Soit r la rotation de centre O et d'angle $\pi/4$. Donner l'expression complexe de r.

iii. Soit B l'image par r du point $A(a)$. Calculer l'affixe b de B sous forme algébrique, puis trigonométrique.

iv. En déduire la valeur exacte de $\cos\pi/12$ et $\sin\pi/12$.

(c) Démontrer l'équivalence suivante : $z \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \left|\dfrac{z-i}{z+i}\right| = 1$.

Sujet 3

(a) Définition d'un déplacement.

(b) Le plan est rapporté à un repère orthonormal direct $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$.

i. Déterminer l'ensemble des points $M(z)$ tels que $|(1+i)z - 2i| = 2$.

ii. Étudier l'application s du plan qui à M d'affixe z, associe le point M' d'affixe $z' = (1+i)z - 2i$.

iii. Retrouver le résultat de la première question.

(c) Soient A, B, C, D quatre points distincts du plan, d'affixes a, b, c, d. On suppose que

$$a + ib = c + id \qquad \text{et} \qquad a + c = b + d\ .$$

Montrer que le quadrilatère $ABCD$ est un carré.

Bonus **Théorème de Pappus**

Soient $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ deux droites du plan, sécantes en un point O.
On rapporte le plan à un repère $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$, où $\vec{\imath}$ dirige $\mathcal{D}$ et $\vec{\jmath}$ dirige $\mathcal{D}'$.
Soient A, B, C trois points de $\mathcal{D}$, et A', B', C' trois points de $\mathcal{D}'$, tous distincts de O.
On suppose que $(AB') \parallel (A'B)$ et que $(BC') \parallel (B'C)$.

(a) Déterminer l'équation de la droite (AB'), puis celle de la droite $(A'B)$.

(b) Montrer que les droites (AB') et $(A'B)$ sont parallèles si et seulement si $aa' = bb'$, où l'on a noté $A(a,0), B(b,0), A'(0,a'), B'(0,b')$.

(c) Montrer que $(AC') \parallel (A'C)$.