Sujet 1 (a) Résoudre sur $\mathbb{R}$ les équations différentielles suivantes :

i. $y' + 2y = t \cos t$

ii. $y'' + y = 4t^2 e^t$

(b) Étudier la fonction $x \mapsto \arcsin(2x\sqrt{1-x^2})$.

(c) Calcul de primitive :

$$\int e^x \cos x \, dx$$

Sujet 2 (a) Résoudre sur $\mathbb{R}$ les équations différentielles suivantes :

i. $y' + 2y = e^t \cos t$

ii. $y'' + y = t \cos t$

(b) Dérivabilité et dérivée de $x \mapsto \sqrt{1 + \sqrt{2 + \sqrt{x}}}$.

(c) Calcul de primitive :

$$\int x^2 \sin x \, dx$$

Sujet 3 (a) Résoudre sur $\mathbb{R}$ les équations différentielles suivantes :

i. $y' + 2ty = t^2 e^t$

ii. $y'' + 2y' + 2y = e^{-t} \cos t$

(b) Montrer :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \arcsin \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} = \arctan x.$$

(c) Calcul de primitive :

$$\int \cos^3(x) \, dx$$

Bonus (a) Soit A et B deux points et $\vec{u}$ un vecteur non nul. Déterminer l'ensemble des points M tels que $\vec{u} \cdot \overrightarrow{BM} = -\vec{u} \cdot \overrightarrow{AM}$.

(b) Soit A et B deux points et $\vec{u}$ un vecteur non nul. Déterminer l'ensemble des points M tels que $\det(\vec{u}, \overrightarrow{BM}) = -\det(\vec{u}, \overrightarrow{AM})$.

(c) Soit A, B, C trois points du plan non alignés du plan.

Montrer que pour tout point M du plan, on a :

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CM} + \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BC} = 0.$$

En déduire que les hauteurs du triangle ABC sont concourantes.