Sujet 1 (a) Déterminer une équation cartésienne de la droite passant par le point $A(2,3)$ et dirigée par le vecteur $\vec{u}(8,1)$.

(b) Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle suivante :

$$y' - y = \sin(x) \quad \text{et} \quad y(0) = 1.$$

(c) On considère les points $A(1,1)$ et $B(0,2)$ du plan.
Déterminer les point M du plan tels que $AM = 2BM$.

Sujet 2 (a) Déterminer une équation cartésienne de la droite passant par le point $A(2,-3)$ et dirigée par le vecteur $\vec{u}(5,1)$.

(b) Soit f la fonction définie sur $I = \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ par $f(x) = \ln\Big(\tan(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4})\Big)$.
Montrer que f est dérivable sur I, et calculer sa dérivée (que l'on simplifiera le plus possible).

(c) Résoudre sur $I = \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ l'équation différentielle suivante :

$$y' - y\tan(x) = \frac{1}{\cos^2(x)}.$$

(d) Soit $A(1,4)$, $B(-4,2)$ et $C(3,-1)$ trois points du plan. Préciser la nature du triangle ABC et donner une équation cartésienne de la hauteur issue de A.

Sujet 3 (a) Déterminer une équation cartésienne de la droite passant par les points $B(4,-1)$ et $C(0,-2)$.

(b) Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle suivante :

$$y' + y = (x^2 - 2x + 2)e^{2x} \quad \text{et} \quad y(0) = 0.$$

(c) Soient A et B deux points disctincts du plan tels que $AB = 2$, et I leur milieu. Étudier l'ensemble des points M du plan tels que $MA^2 + MB^2 = 6$.

Bonus (a) Soit A et B deux points et $\vec{u}$ un vecteur non nul. Déterminer l'ensemble des points M tels que $\vec{u}.\overrightarrow{BM} = -\vec{u}.\overrightarrow{AM}$.

(b) Soit A et B deux points et $\vec{u}$ un vecteur non nul. Déterminer l'ensemble des points M tels que $\det(\vec{u}, \overrightarrow{BM}) = -\det(\vec{u}, \overrightarrow{AM})$.

(c) Soit A, B, C trois points du plan non alignés du plan.
Montrer que pour tout point M du plan, on a :

$$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CM} + \overrightarrow{AC}.\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{AM}.\overrightarrow{BC} = 0.$$

En déduire que les hauteurs du triangle ABC sont concourantes.