Sujet 1 (a) Définition de repère orthonormé direct du plan.

(b) Déterminer une équation cartésienne de la droite :

i. passant par le point $A(2,3)$ et dirigée par le vecteur $\vec{u}(8,1)$;

ii. passant par les points $B(4,-1)$ et $C(0,-2)$;

iii. passant par le point $D(-1,3)$ et orthogonale au vecteur $\vec{n}(1,1)$. En déterminer en outre une représentation paramétrique.

(c) Soit A et B deux points et $\vec{u}$ un vecteur non nul. Déterminer l'ensemble des points M tels que $\vec{u}.\overrightarrow{BM} = -\vec{u}.\overrightarrow{AM}$.

(d) Soit A, B, C trois points du plan non alignés du plan.
Montrer que pour tout point M du plan, on a :

$$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CM} + \overrightarrow{AC}.\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{AM}.\overrightarrow{BC} = 0.$$

En déduire que les hauteurs du triangle ABC sont concourantes.

Sujet 2 (a) Coordonnées du milieu d'un segment $[AB]$.

(b) Soit $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ les cercles d'équations $x^2 + y^2 = 100$ et $x^2 + y^2 - 24x - 18y + 200 = 0$. Montrer qu'ils sont tangents et former une équation de la tangente au point commun.

(c) Soit A et B deux points et $\vec{u}$ un vecteur non nul. Déterminer l'ensemble des points M tels que $\det(\vec{u}, \overrightarrow{BM}) = -\det(\vec{u}, \overrightarrow{AM})$.

(d) Soit A, B, C trois points du plan non alignés du plan.
Montrer que pour tout point M du plan, on a :

$$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CM} + \overrightarrow{AC}.\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{AM}.\overrightarrow{BC} = 0.$$

En déduire que les hauteurs du triangle ABC sont concourantes.

Sujet 3 (a) Formule pour la longueur AB.

(b) Soit $(O, \vec{i}, \vec{j})$ un repère orthonormé direct, et considérons un point $\Omega(0,1)$ et deux vecteurs $\vec{I}(3/5, 4/5)$ et $\vec{J}(-4/5, 3/5)$.
Montrer que $(\Omega, \vec{I}, \vec{J})$ est un repère direct du plan. Est-il orthonormé ?

(c) Soit $A(1,4)$, $B(-4,2)$ et $C(3,-1)$ trois points du plan. Préciser la nature du triangle ABC et donner une équation cartésienne de la hauteur issue de A.

(d) Soient A et B deux points disctincts du plan tels que $AB = 2$, et I leur milieu. Étudier l'ensemble des points M du plan tels que $MA^2 + MB^2 = 6$.

(e) Soit A, B, C trois points du plan non alignés du plan.
Montrer que pour tout point M du plan, on a :

$$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CM} + \overrightarrow{AC}.\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{AM}.\overrightarrow{BC} = 0.$$

En déduire que les hauteurs du triangle ABC sont concourantes.