Positivité et sommes de carrés en géométrie algébrique réelle

Rencontres doctorales Mathématiques de l'Ouest

Richard Leroy

20 novembre 2005

Plan de l'exposé

Historique

17$^{\text{ème}}$ problème de Hilbert :

Historique

17$^{\text{ème}}$ problème de Hilbert :

- Question (Hilbert, 1900) : Tout polynôme $P \in \mathbb{R}[X_1, \ldots, X_n]$ est-il une somme de carrés de polynômes réels ?

Historique

17$^{\text{ème}}$ problème de Hilbert :

- Question (Hilbert, 1900) : Tout polynôme $P \in \mathbb{R}[X_1, \ldots, X_n]$ est-il une somme de carrés de polynômes réels ?
- Réponse (Artin, 1927) : un tel polynôme n'est un général qu'une somme de carrés de fractions rationnelles réelles.

Historique

$17^{\text{ème}}$ problème de Hilbert :

- Question (Hilbert, 1900) : Tout polynôme $P \in \mathbb{R}[X_1, \ldots, X_n]$ est-il une somme de carrés de polynômes réels ?
- Réponse (Artin, 1927) : un tel polynôme n'est un général qu'une somme de carrés de fractions rationnelles réelles.
- Contre-exemple (Motzkin, 1963) : $M(X,Y) = X^4Y^2 + X^2Y^4 - 3X^2Y^2 + 1$

Quantifier

Quantifier

- Théorie de la mesure :
  - Blekherman (2004) : la proportion de sommes de carrés parmi les pôlynômes positifs tend vers 0 avec le nombre de variables (et à degré fixé)

Quantifier

- Théorie de la mesure :
  - Blekherman (2004) : la proportion de sommes de carrés parmi les pôlynômes positifs tend vers 0 avec le nombre de variables (et à degré fixé)
- Densité :

Quantifier

- Théorie de la mesure :
  - Blekherman (2004) : la proportion de sommes de carrés parmi les pôlynômes positifs tend vers 0 avec le nombre de variables (et à degré fixé)
- Densité :
  - Théorème (Berg, 1987) : $\sum \mathbb{R}[\bar{X}]^2$ est dense dans l'ensemble des polynômes positifs (pour la norme $\|.\|_1$ des coefficients)

Quantifier

- Théorie de la mesure :
  - Blekherman (2004) : la proportion de sommes de carrés parmi les pôlynômes positifs tend vers 0 avec le nombre de variables (et à degré fixé)
- Densité :
  - Théorème (Berg, 1987) : $\sum \mathbb{R}[\bar{X}]^2$ est dense dans l'ensemble des polynômes positifs (pour la norme $\|.\|_1$ des coefficients)
  - Exemple (Reznick, 2004) :

$$\forall n \geq 3, M_n(X, Y) := M + \frac{16}{2^{2n}} X^{2n} \in \sum \mathbb{R}[X, Y]^2$$

Quantifier

- Théorie de la mesure :
  - Blekherman (2004) : la proportion de sommes de carrés parmi les pôlynômes positifs tend vers 0 avec le nombre de variables (et à degré fixé)
- Densité :
  - Théorème (Berg, 1987) : $\sum \mathbb{R}[\bar{X}]^2$ est dense dans l'ensemble des polynômes positifs (pour la norme $\|.\|_1$ des coefficients)
  - Exemple (Reznick, 2004) :

$$\forall n \geq 3, M_n(X, Y) := M + \frac{16}{2^{2n}} X^{2n} \in \sum \mathbb{R}[X, Y]^2$$

  - Remarque : $\sum \mathbb{R}[\bar{X}]_k^2$ est fermé dans $\mathbb{R}[\bar{X}]$

Reconnaître algorithmiquement une somme de carrés

Reconnaître algorithmiquement une somme de carrés

- Notations :

Reconnaître algorithmiquement une somme de carrés

- Notations :
  - $f \in \mathbb{R}[\bar{X}]$ de degré pair $2d$

Reconnaître algorithmiquement une somme de carrés

- Notations :
  - $f \in \mathbb{R}[\bar{X}]$ de degré pair $2d$
  - $m := \left(1, X_1, \ldots, X_n, X_1^2, X_1 X_2, \ldots, X_n^d\right)$ base de $\mathbb{R}[\bar{X}]_d$

Reconnaître algorithmiquement une somme de carrés

- Notations :
  - $f \in \mathbb{R}[\bar{X}]$ de degré pair $2d$
  - $m := \left(1, X_1, \ldots, X_n, X_1^2, X_1X_2, \ldots, X_n^d\right)$ base de $\mathbb{R}[\bar{X}]_d$
  - $\mathcal{L}_f := \{B \in \mathcal{S}_k(\mathbb{R}) / f = mB\,{}^t m\}$, où $k = C_{n+d}^d$

Reconnaître algorithmiquement une somme de carrés

- Notations :
  - $f \in \mathbb{R}[\bar{X}]$ de degré pair $2d$
  - $m := \left(1, X_1, \ldots, X_n, X_1^2, X_1X_2, \ldots, X_n^d\right)$ base de $\mathbb{R}[\bar{X}]_d$
  - $\mathcal{L}_f := \{B \in \mathcal{S}_k(\mathbb{R}) / f = mB\,{}^t m\}$, où $k = C_{n+d}^d$

- Théorème :

$$f \in \sum \mathbb{R}[\bar{X}]^2 \Leftrightarrow \mathcal{L}_f \cap \mathcal{S}_k^+(\mathbb{R}) \neq \emptyset$$

Reconnaître algorithmiquement une somme de carrés

- Notations :
  - $f \in \mathbb{R}[\bar{X}]$ de degré pair $2d$
  - $m := \left(1, X_1, \ldots, X_n, X_1^2, X_1X_2, \ldots, X_n^d\right)$ base de $\mathbb{R}[\bar{X}]_d$
  - $\mathcal{L}_f := \{B \in \mathcal{S}_k(\mathbb{R}) / f = mB\,{}^t m\}$, où $k = C_{n+d}^d$

- Théorème :

$$f \in \sum \mathbb{R}[\bar{X}]^2 \Leftrightarrow \mathcal{L}_f \cap \mathcal{S}_k^+(\mathbb{R}) \neq \emptyset$$

- Exemple :
  $M(X,Y) = X^4Y^2 + X^2Y^4 - 3X^2Y^2 + 1$,
  $m := (1, X^2Y, XY^2, XY)$
  $$\Rightarrow \mathcal{L}_M = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{pmatrix} \right\}$$

"Presque sommes de carrés"

"Presque sommes de carrés"

- Sommes de carrés perturbées :

"Presque sommes de carrés"

- Sommes de carrés perturbées :
  Densité explicite (Lasserre, 2004) :

$$f \geq 0 \text{ sur } \mathbb{R}^n$$

$$\Updownarrow$$

$$\forall \varepsilon > 0, \exists r_\varepsilon \in \mathbb{N}, f_\varepsilon := f + \varepsilon \sum_{k=0}^{r_\varepsilon} \sum_{j=1}^{n} \frac{x_j^{2k}}{k!} \in \sum \mathbb{R}[\bar{X}]^2$$

"Presque sommes de carrés"

- Sommes de carrés perturbées :
  Densité explicite (Lasserre, 2004) :

$$f \geq 0 \text{ sur } \mathbb{R}^n$$

$$\Updownarrow$$

$$\forall \varepsilon > 0, \exists r_\varepsilon \in \mathbb{N}, f_\varepsilon := f + \varepsilon \sum_{k=0}^{r_\varepsilon} \sum_{j=1}^{n} \frac{x_j^{2k}}{k!} \in \sum \mathbb{R}[\bar{X}]^2$$

- Sommes de carrés pondérées :

"Presque sommes de carrés"

- Sommes de carrés perturbées :
  Densité explicite (Lasserre, 2004) :

$$f \geq 0 \text{ sur } \mathbb{R}^n$$

$$\Updownarrow$$

$$\forall \varepsilon > 0, \exists r_\varepsilon \in \mathbb{N}, f_\varepsilon := f + \varepsilon \sum_{k=0}^{r_\varepsilon} \sum_{j=1}^{n} \frac{x_j^{2k}}{k!} \in \sum \mathbb{R}[\bar{X}]^2$$

- Sommes de carrés pondérées :
  Résultat fondateur (Schmüdgen, 1991) :
  $S := \{g_1, \ldots, g_s\}, K := \{g_1 \geq 0, \ldots, g_s \geq 0\}$ compact.
  Alors

$$f > 0 \text{ sur } K \Rightarrow f = \sum s_e g^e$$

où $s_e \in \sum \mathbb{R}[\bar{X}]^2, e \in \{0,1\}^s$ et $g^e := g_1^{e_1} \ldots g_s^{e_s}$

"Presque sommes de carrés"

"Presque sommes de carrés"

- Sommes de carrés modulo...

"Presque sommes de carrés"

- Sommes de carrés modulo...
  ...l'idéal du gradient (Demmel, Nie, Sturmfels, 2004) :

$$f > 0 \text{ sur } \{u \in \mathbb{R}^n / \nabla f(u) = 0\}$$

$$\Downarrow$$

$$f \in \sum \mathbb{R}[\bar{X}]^2 \text{ modulo } \left\langle \frac{\partial f}{\partial X_1}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial X_n} \right\rangle$$

Application à l'optimisation

On cherche à résoudre les problèmes suivants :

$$(P) \inf \{f(x)/x \in \mathbb{R}^n\}$$

$$(Q) \inf \{f(x)/g_1(x) \geq 0, \ldots, g_s(x) \geq 0\}$$

Ces problèmes sont NP-durs en général, mais on peut les résoudre de manière numérique en remplaçant les conditions de positivité par des conditions d'écriture en (presque) sommes de carrés.