ENS Cachan, antenne de Ker Lann
Agrégation de Mathématiques 2007
Préparation à l'oral de modélisation
Option C : Calcul Formel

Sommes de carrés dans $\mathbb{R}[X_1, \ldots, X_n]$.

On décrit dans ce texte l'association à tout polynôme multivarié réel $f \in \mathbb{R}[X_1, \ldots, X_n]$ d'un sous-espace affine L_f des matrices symétriques réelles $S(\mathbb{R})$. Cette association permet alors d'étudier l'éventuelle écriture d'un polynôme réel positif en sommes de carrés.

1 Introduction

Dans le reste du texte, $\mathbb{R}[X]$ désignera l'anneau des polynômes en n variables $\mathbb{R}[X_1, \ldots, X_n]$ $(n \geq 1)$.

Pour $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$, on écrira X^α en lieu et place du monôme $X_1^{\alpha_1} \ldots X_n^{\alpha_n}$.

Soit $f \in \mathbb{R}[X]$ un polynôme réel positif sur $\mathbb{R}^n$. f est alors de degré pair $2d$.

En une variable, on sait qu'un tel polynôme s'écrit comme une somme de deux carrés.

Question 1 : le démontrer.

On cherche à généraliser cette propriété pour $n \geq 2$ variables.

Quand le degré de f est exactement 2, le résultat découle de la théorie des formes quadratiques.

Question 2 : pourquoi ?

Pour un degré supérieur, on cherche à écrire f comme une forme quadratique en les monômes de degré au plus d. Il y en a exactement $N := C_{n+d}^n$. Soit $m = (m_1, \ldots m_N)$ une matrice-ligne contenant la liste de tous ces monômes.

On a définit alors L_f comme l'ensemble des matrices symétriques réelles B de taille N vérifiant la relation :

$$f = mB^t m.$$

Cette relation peut s'écrire sous la forme :

$$(S) \quad \sum_{m_i m_j = X^\alpha} b_{ij} = a_\alpha$$

où l'on a écrit $f = \sum a_\alpha X^\alpha$.

Il s'agit d'un système linéaire dont les inconnues sont les b_{ij} pour $1 \leq i, j \leq N$. L_f est donc un sous-espace affine de $S_N(\mathbb{R})$, de dimension

$$\frac{1}{2} C_{n+d}^d \left(C_{n+d}^d + 1 \right) - C_{n+2d}^{2d}.$$

Question 3 (difficile) : le démontrer.

2 Matrices de Gram

On garde les mêmes notations. On sait maintenant associer à un polynôme f un espace affine L_f dont on connaît la dimension. On a alors le théorème suivant :

Théorème 1 *Soit $f \in \mathbb{R}[X]$ de degré $2d$.*
Alors :

$$f \in \sum \mathbb{R}[X]^2 \textbf{ ssi } L_f \cap \mathcal{S}_N^+(\mathbb{R}) \neq \emptyset$$

Une matrice $B \in L_f \cap \mathcal{S}_N^+(\mathbb{R})$ est appelée matrice de Gram associée à f.
Preuve. $\boxed{\Rightarrow}$ Supposons que $f \in \sum \mathbb{R}[X]^2$:

$$f = \sum_{i=1}^t h_i^2.$$

Soit $A \in M_{N \times t}(\mathbb{R})$ la matrice dont la i^{eme} colonne est composée des coefficients de h_i. Alors

$$f = m \ (A^t A)^t m.$$

Posant $B = A^t A$, on obtient la matrice attendue.
$\boxed{\Leftarrow}$ Supposons qu'il existe une matrice $B \in L_f \cap S_N^+(\mathbb{R})$. La décomposition de Cholesky de B permet alors de conclure. ∎

Question 4 : quelles sont les conditions d'application pour la décomposition de Cholesky ?

3 Réduction de la dimension.

La dimension de L_f est très grande pour être traitée efficacement par ordinateur. Cependant, on dispose de moyens pour la réduire, en enlevant de la liste $m = (m_1, \ldots m_N)$ des monômes dont on est sûr qu'il ne peuvent pas apparaître dans une décomposition en sommes de carrés. Voici une règle simple, mais efficace : Supposons que le monôme X^α s'écrit comme carré d'un monôme de degré au plus d :

$$X^\alpha = X^{2\beta}$$

et que cette écriture est la seule possible en produit de deux monômes de degré au plus d. Si le coefficient de X^α dans f est nul, alors on peut rayer le monôme X^β de la liste m.

Question 5 : Soit $f = 1 + x^2 + y^2 + x^2y^2$. Quelle est la liste de monômes admissibles pour une éventuelle écriture en sommes de carrés ? Calculer l'espace affine L_f pour cette liste de monômes. Ecrire explicitement f comme somme de carrés.

4 Le polynôme de Motzkin.

On a vu en introduction qu'un polynôme réel en une variable positif sur $\mathbb{R}$ est une sommes de carrés. Est-ce toujours le cas en dimension supérieure ? C'est l'objet du 17ème problème de Hilbert. La réponse est négative, et le polynôme de Motzkin est le premier exemple historique de polynôme réel positif sur $\mathbb{R}^2$ mais qui n'est pas somme de carrés de polynômes. Il s'agit du polynôme suivant :

$$M := x^4y^2 + x^2y^4 - 3x^2y^2 + 1.$$

Le fait qu'il soit positif découle de l'inégalité arithmético-géométrique.

Question 6 : Quelle est la liste de monômes admissibles pour une éventuelle écriture en sommes de carrés ? Calculer l'espace affine L_M pour cette liste de monômes. En déduire que M n'est pas une somme de carrés.

Ainsi, dès la dimension 2, la réponse au 17ème problème de Hilbert est négative. Cependant, Artin a démontré que tout polynôme positif peut s'écrire comme somme de carrés de fractions rationnelles réelles. On a ainsi par exemple :

$$M = \frac{x^2y^2(x^2+y^2+1)(x^2+y^2-2)^2 + (x^2-y^2)^2}{\left(x^2+y^2\right)^2}$$