Matrices compagnes, matrices symétriques

Richard Leroy

richard.leroy@univ-rennes1.fr
http ://perso.univ-rennes1.fr/richard.leroy/

Préparation à l'agrégation de Mathématiques 2008
Université de Rennes 1

Résumé

Cet article présente quelques résultats sur les classes d'équivalence et de similitude sous l'action des matrices symétriques.

Dans la suite de cet exposé, $\mathbb{K}$ désigne un corps (commutatif) quelconque, et n un entier strictement positif.
On note également :

- $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ l'espace des matrices carrées d'ordre $n \geqslant 1$ sur $\mathbb{K}$
- $\mathcal{S}_n(\mathbb{K})$ l'espace des matrices symétriques d'ordre n sur $\mathbb{K}$
- $\mathcal{S}_n^*(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices symétriques inversibles d'ordre n sur $\mathbb{K}$.

Enfin, si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, ${}^t\!A$ désigne sa transposée.

1 Similitude et tranposition

Il est de notoriété publique que toute matrice sur $\mathbb{K}$ est semblable à sa transposée. Le théorème suivant, peut-être moins connu, précise que l'on peut choisir un changement de base symétrique :

Théorème 1 *Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.*
Il existe une matrice $P \in \mathcal{S}_n^*(\mathbb{K})$ telle que ${}^t\!A = P^{-1}AP$.

La preuve de ce théorème s'appuie sur l'étude des matrices compagnes et sur la décomposition de Frobenius, qui font l'objet de sections suivantes.

1.1 Matrices compagnes

Soit $P = X^d + \sum_{i=0}^{d-1} a_i X^i \in \mathbb{K}[X]$ un polynôme unitaire de degré $d \geqslant 1$.
Considérons l'espace quotient $E = \mathbb{K}[X]/(P)$.

E est un $\mathbb{K}-$espace vectoriel de dimension d, dont $\mathcal{B} = (1, \bar{X}, \ldots, \bar{X}^{d-1})$ forme une base.
Considérons l'endomorphisme de multiplication par $\bar{X}$:

$$m_{\bar{X}} : \left\{ \begin{array}{ccc} \dfrac{E}{Q(X)} & \rightarrow & \dfrac{E}{XQ(X)} \end{array} \right.$$

La matrice de $m_{\bar{X}}$ dans la base $\mathcal{B}$ est alors :

$$mat_{\mathcal{B}}(m_{\bar{X}}) = \begin{pmatrix} 0 & & & -a_0 \\ 1 & \ddots & & -a_1 \\ & \ddots & 0 & \vdots \\ & & 1 & -a_{d-1} \end{pmatrix}.$$

Cette matrice est appelée matrice compagne du polynôme P, et on la note $\mathcal{C}(P)$.
On a alors classiquement :

Proposition 1 *Le polynôme caractéristique et le polynôme minimal d'une matrice compagne $\mathcal{C}(P)$ sont égaux, et valent P.*

1.2 Décomposition de Frobenius

La décomposition de Frobenius est un résultat de réduction des endomorphismes en dimension finie. Elle est souvent vue comme un corollaire de la décomposition de Jordan. Cependant, cette façon de procéder est maladroite, dans le sens où la décomposition de Frobenius est valable sur n'importe quel corps.

Théorème 2 (Décomposition de Frobenius) *Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.*
Il existe un nombre fini de polynômes unitaires non constants $P_1, \ldots, P_r$ vérifiant $P_{i+1} \mid P_i$ $(1 \leqslant i \leqslant r-1)$, tels que A soit semblable à la matrice diagonale par blocs suivante :

$$\mathcal{C}(P_1, \ldots, P_r) = \begin{pmatrix} \mathcal{C}(P_1) & & \\ & \ddots & \\ & & \mathcal{C}(P_r) \end{pmatrix}$$

De plus, les polynômes $P_1, \ldots, P_r$ sont uniques, et appelés invariants de similitude de la matrice A.

On dispose maintenant des outils pour démontrer le théorème 1.

1.3 Démonstration du théorème 1

1.3.1 Le cas des matrices compagnes

Montrons tout d'abord qu'une matrice compagne est conjuguée à sa transposée par une matrice symétrique inversible.

Soit $\mathcal{C}(P)$ une matrice compagne associée à un polynôme $P = X^d + \sum_{i=0}^{d-1} a_i X^i$.

Considérons les polynômes de Hörner, définis de la manière suivante :

$$\begin{cases} H_0(X) = 1 \\ \forall i \in \{1, \ldots, d-1\},\ H_i(X) = XH_{i-1}(X) + a_{d-i} \end{cases}$$

Il s'agit d'une famille échelonnée par le degré à d éléments, et donc d'une base de E. Réordonnant les polynômes, on note $\mathcal{H} = (H_{d-1}, \ldots, H_0)$ cette base, dite de Hörner.

La matrice de $m_{\bar{X}}$ dans la base $\mathcal{H}$ vaut alors, d'après la propriété de récurrence des polynômes de Hörner :

$$mat_{\mathcal{H}}(m_{\bar{X}}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & \cdots & -a_{d-1} \end{pmatrix} = {}^t\mathcal{C}(P).$$

De plus, la matrice de changement de bases entre $\mathcal{B}$ et $\mathcal{H}$ est symétrique :

$$mat_{\mathcal{B}\to\mathcal{H}} = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_{d-1} & 1 \\ a_2 & a_3 & & a_{d-1} & 1 & \\ a_3 & & \iddots & \iddots & & \\ \vdots & a_{d-1} & \iddots & & & \\ a_{d-1} & 1 & & & & \\ 1 & & & & & \end{pmatrix} \in \mathcal{S}_n^*(\mathbb{K}).$$

1.3.2 Le cas général

Montrons maintenant que toute matrice est conjuguée à sa transposée par une matrice symétrique.

Le cas d'une matrice diagonale par blocs de la forme

$$\mathcal{C}(P_1, \ldots, P_r) = \begin{pmatrix} \mathcal{C}(P_1) & & \\ & \ddots & \\ & & \mathcal{C}(P_r) \end{pmatrix}$$

est évident à la vue de la partie précédente.

Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est une matrice quelconque, alors il existe une matrice Q inversible et des polynômes $P_1, \ldots, P_r$ tels que

$$A = Q^{-1}\mathcal{C}(P_1, \ldots, P_r)Q.$$

D'après la remarque précédente, il existe une matrice $S \in \mathcal{S}_n^*(\mathbb{K})$ telle que

$$\mathcal{C}(P_1, \ldots, P_r) = S^{-1}\,{}^t\mathcal{C}(P_1, \ldots, P_r)S.$$

Considérons la matrice $T = Q^{-1}S^{-1}\,{}^tQ^{-1}$. Il s'agit d'une matrice symétrique inversible, et on a de plus :

$$\begin{aligned} T\,{}^tAT^{-1} &= \left[Q^{-1}S^{-1}\,{}^tQ^{-1}\right]\,{}^t\!\left[Q^{-1}\mathcal{C}(P_1, \ldots, P_r)Q\right]\left[{}^tQSQ\right] \\ &= Q^{-1}S^{-1}\,\underbrace{{}^tQ^{-1}\,{}^tQ}\,{}^t\mathcal{C}(P_1, \ldots, P_r)\,\underbrace{{}^tQ^{-1}\,{}^tQ}\,SQ \\ &= Q^{-1}\,\underbrace{S^{-1}\,{}^t\mathcal{C}(P_1, \ldots, P_r)S}\,Q \\ &= Q^{-1}\mathcal{C}(P_1, \ldots, P_r)Q \\ &= A \end{aligned}$$

Ceci conclut la démonstration du théorème 1. ■

2 Applications

2.1 Produit de deux matrices symétriques

Corollaire 1 *Toute matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ s'écrit comme le produit de deux matrices symétriques.*

La preuve de ce résultat est simple, une fois le théorème 1 démontré.
En effet, il existe une matrice symétrique $S \in \mathcal{S}_n^*(\mathbb{K})$ telle que $A = S\,{}^tAS^{-1}$.
Posant $T = {}^tAS^{-1}$, il vient $A = ST$, avec de plus :

$${}^tT = {}^tS^{-1}A = S^{-1}A = S^{-1}ST = T,$$

ie T est symétrique. ■

2.2 Similitude et matrices symétriques

Cette section est consacrée aux classes de similitude des matrices symétriques sur $\mathbb{R}$ et $\mathbb{C}$.
Sur $\mathbb{R}$, la situation est bien connue : une matrice A est diagonalisable sur $\mathbb{R}$ si et seulement si sa classe de similitude contient une matrice symétrique.
Sur $\mathbb{C}$, le résultat est le suivant :

Corollaire 2 *Toute classe de similitude sur $\mathbb{C}$ contient une matrice symétrique.*

En effet, si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, alors il existe une matrice symétrique $S \in \mathcal{S}_n^*(\mathbb{C})$ telle que $A = S\,{}^tAS^{-1}$.
Mais S, étant complexe symétrique et inversible, peut s'écrire $S = Q\,{}^tQ$ avec

Q inversible (*pourquoi*?).
La matrice $Q^{-1}AQ$ est semblable à A, et symétrique :

$$^{t}\left[Q^{-1}AQ\right] = {}^{t}Q\,{}^{t}A\,{}^{t}Q^{-1} = {}^{t}QS^{-1}AS\,{}^{t}Q^{-1} = Q^{-1}AQ.$$

Ceci conlut la démonstration. ■

Références

[PRA] Prasolov, *Problèmes et théorèmes d'algèbre linéaire*, Cassini, 2008