NOM Prénom :

12 mars 2007

B04 - Contrôle continu n°2

Exercice 1 (8 points)

Soit E le $\mathbb{R}-ev$ $\mathbb{R}^3$. On définit l'application $f : E \to E$ par

$$f(x, y, z) = (x - y, y - z, z - x).$$

1. Montrer que f est un endomorphisme de E.
2. Déterminer $Ker(f)$.
3. (a) Montrer que $Im(f) \subset \{(u, v, w) \in E / u + v + w = 0\}$.
   (b) Soit $(u, v, w) \in E$ vérifiant $u = v = w$. Que vaut $f(u, 0, -v)$?
   (c) En déduire que $Im(f) = \{(u, v, w) \in E / u + v + w = 0\}$.
   (d) Trouver une famille génératrice de $Im(f)$.
4. Montrer que $Ker(f)$ et $Im(f)$ sont en somme directe.
5. Montrer que $Ker(f)$ et $Im(f)$ sont supplémentaires dans E.
6. On pose $g = f + Id$. Montrer que g est injective.
   (on rappelle que $Id : E \to E$ est définie par $Id(x, y, z) = (x, y, z)$).

Exercice 2 (4 points)

Dire dans chaque cas si la fonction de E dans E est un endomorphisme de E ou pas :

$E = \mathbb{R}[X]$	$f(P) = P' - P''$	$VRAI$	$FAUX$
$E = \mathbb{R}[X]$	$f(P) = P \circ P$	$VRAI$	$FAUX$
$E = \mathbb{R}^2$	$f(x, y) = (\pi x, y)$	$VRAI$	$FAUX$
$E = \mathbb{C}$ comme $\mathbb{R}$-ev	$f(z) = \mathrm{Im}(z) + (1 - i)^2 \mathrm{Re}(z)$	$VRAI$	$FAUX$

On rappelle qu'une mauvaise réponse retire 0.5 point.