Unicité des facteurs invariants d'une matrice à coefficients dans un anneau principal

Richard Leroy

richard.leroy@univ-rennes1.fr
http ://perso.univ-rennes1.fr/richard.leroy/

Préparation à l'agrégation de Mathématiques 2008
Université de Rennes 1

Il s'agit de montrer que si une matrice M est équivalente à une matrice de la forme

$$D = \left(\begin{array}{ccc|c} d_1 & & & \\ & \ddots & & (0) \\ & & d_r & \\ \hline & (0) & & (0) \end{array}\right),$$

alors les idéaux $(d_1), \dots, (d_r)$ sont définis de manière unique.

On trouve des preuves de ce résultat dans **Goblot**, *Algèbre commutative* (p. 31), et dans **Serre**, *Les matrices* (p. 67). Voici une preuve courte, qui est une réécriture des arguments utilisés dans les références ci-dessus.

Preuve :
On peut déjà remarquer que le nombre r ne dépend que de M (c'est son rang).
Considérons les éléments suivants :

$$\forall k \in \{1, \dots, r\}, \delta_k := \text{pgcd(mineurs d'ordre } k\text{) de } M.$$

Soient M et N deux matrices équivalentes, et montrons que

$$\forall k, \delta_k(M) \mid \delta_k(N).$$

Il suffit de le montrer dans le cas où $N = PM$, le cas où $NQ = M$ étant similaire.
Considérons un mineur d'ordre k de PM, par exemple le premier. En notant L_i^k les lignes de M tronquées de taille k, ce mineur vaut

$$\det\left[p_{1,1}L_1^k + \cdots + p_{1,m}L_p^k, \dots, p_{k,1}L_1^k + \cdots + p_{k,m}L_p^k\right].$$

La multilinéarité du déterminant permet de développer l'expression précédente, et de voir qu'il s'agit en fait d'une combinaison linéaire des mineurs d'ordre k extraits des k premières colonnes de M. Il est donc divisible par $\delta_k(M)$.

On en déduit alors que $\delta_k(M) = \delta_k(D) = d_1 \ldots d_k$, ce qui suffit pour conclure. $\blacksquare$