Matrices semblables à leur inverse

Richard Leroy

richard.leroy@ens-cachan.org

Résumé

On caractérise dans cette note les matrices inversibles (à coefficients dans un corps) semblables à leur inverse.

Mots-clefs : invariants de similitude, matrices compagnes, matrices orthogonales, polynômes réciproques.

1 Avec les invariants de similitude

Soit k un corps, et $A \in GL_n(k)$ $(n \geq 1)$ une matrice inversible. Dans un premier temps, on exprime l'éventuelle similitude de A et de son inverse A^{-1} en termes d'invariants de similitude.

1. A est semblable à une matrice diagonale par blocs $\mathrm{Diag}\big(\mathcal{C}(P_1), \dots, \mathcal{C}(P_r)\big)$, dont les blocs sont les matrices compagnes de ses invariants de similitude $P_1 \mid \cdots \mid P_r$.

   Démonstration. Décomposition de Frobenius (existence). □

2. A^{-1} est semblable à la matrice $\mathrm{Diag}\big(\mathcal{C}(P_1)^{-1}, \dots, \mathcal{C}(P_r)^{-1}\big)$.
3. Pour tout i, $\mathcal{C}(P_i)^{-1}$ est semblable à $\mathcal{C}(Q_i)$, avec

   $$Q_i = \frac{1}{P_i(0)} \mathrm{Rec}(P_i),$$

   où $\mathrm{Rec}(P_i) = X^{\deg P_i} P_i(1/X)$ désigne le polynôme réciproque de P_i.

   Démonstration. Soit u_i l'endomorphisme dont la matrice dans la base $(e_1, \dots, e_{n_i})$ est $\mathcal{C}(P_i)$. Dans la base $(e_{n_i}, \dots, e_1)$, u_i^{-1} a pour matrice $\mathcal{C}(Q_i)$.
   On pourra aussi regarder le problème 13.3 page 93 (corrigé page 108) de [P]. □

4. $Q_1 \mid \cdots \mid Q_r$.

   Démonstration. Si S, T sont deux polynômes quelconques, $\mathrm{Rec}(ST) = \mathrm{Rec}(S)\,\mathrm{Rec}(T)$, donc prendre les polynômes réciproques conserve les relations de divisibilité. □

5. $Q_1, \dots, Q_r$ sont les invariants de similitude de A^{-1}.

   Démonstration. Décomposition de Frobenius (unicité). □

6. Finalement : A est semblable à A^{-1} si et seulement si ses invariants de similitude vérifient

   $$\forall i,\ P_i = \frac{1}{P_i(0)} \mathrm{Rec}(P_i).$$

   En particulier, $P_i(0)^2 = 1$, donc $P_i(0) = \pm 1$: au signe près, les P_i sont des polynômes réciproques.

2 Décomposition en produit de deux involutions

Dans [P], on trouve le résultat suivant (th 26.2 page 135) :

Théorème (Djokovic, 1967)**.** *Une matrice A (à coefficients dans un corps) est semblable à son inverse si et seulement si elle peut s'écrire comme produit de deux involutions.*

On propose ici une démonstration plus courte et peut-être moins calculatoire, s'appuyant sur la décomposition de Frobenius (valable sur tout corps) plutôt que sur la réduction de Jordan.

Démonstration. Si $A = ST$ où S et T sont deux involutions (en particulier, S et T sont inversibles), alors A est inversible, d'inverse $A^{-1} = TS = S(ST)S = S^{-1}AS$.

On suppose maintenant que A est inversible et semblable à son inverse. On reprend les notations de la section précédente. Les invariants de similitude de A vérifient :

$$\forall i,\ P_i = Q_i = \frac{1}{P_i(0)}\,\mathrm{Rec}(P_i).$$

A est semblable à la matrice Diag $\big(\mathcal{C}(P_1), \ldots, \mathcal{C}(P_r)\big)$. Il suffit de montrer que chaque bloc $\mathcal{C}(P_i)$ peut s'écrire comme produit de deux involutions. Soit C un tel bloc, de taille n_i.
D'après le point 3 de la section précédente, on a :

$$\forall i,\ C^{-1} = B\mathcal{C}(Q_i)B^{-1} = B\mathcal{C}(P_i)B = BCB$$

où B est la matrice de taille n_i formée de 0 sauf sur l'antidiagonale, remplie de 1 (c'est la matrice de passage de la base $(e_1, \ldots, e_{n_i})$ à la base $(e_{n_i}, \ldots, e_1)$).
On a alors $C = (CB)B$, puisque $B^2 = I$. On vérifie finalement que $(CB)^2 = CBCB = CC^{-1} = I$. On a donc bien écrit C comme produit de deux involutions. □

Corollaire. *Toute matrice orthogonale peut s'écrire comme produit de deux involutions.*

Démonstration. Soit A une matrice orthogonale. A est inversible, d'inverse $A^{-1} = {}^tA$. On conclut en se souvenant que toute matrice est semblable à sa transposée. Pour montrer ce dernier résultat, il suffit de considérer le cas des matrices compagnes. Une telle matrice $\mathcal{C}(P)$ ($P = X^d + \sum_{i=0}^{d-1} a_i X^i$) est la matrice dans la base canonique de $k[X]/(P)$ de l'endomorphisme m_X de multiplication par $\bar{X}$. Dans la base de Hörner $(H_{d-1}, \ldots, H_1)$ définie par

$$\begin{cases} H_0(X) & = 1 \\ H_i(X) & = XH_{i-1}(X) + a_{d-i} \qquad (1 \leq i \leq d-1), \end{cases}$$

la matrice de m_X est ${}^t\mathcal{C}(P)$ (noter que $H_d(X) = P$: c'est l'algorithme de Hörner). □

Remarque : Pour parler d'orthogonalité, mieux vaut parler de matrices réelles.

Bibliographie

[P] Prasolov, *Problèmes et théorèmes d'algèbre linéaire*, éditions Cassini.