

Devoir maison n°1 à rendre le 15 septembre 2010

— Nombres complexes —

Exercice 1. Donner les formes algébrique et trigonométrique du complexe

$$z = \frac{(1+i)^2}{(1-i)^3}.$$

Exercice 2. Soient z , z' et z'' trois nombres complexes tels que $zz' = (z'')^2$. Montrer que

$$\left| \frac{z+z'}{2} + z'' \right| + \left| \frac{z+z'}{2} - z'' \right| = |z| + |z'|.$$

Exercice 3. On considère le nombre complexe

$$z = \cos\left(\frac{2\pi}{7}\right) + i \sin\left(\frac{2\pi}{7}\right).$$

1. (a) Que vaut z^7 ?
(b) Quel est le module de z ?

2. On pose

$$S = z + z^2 + z^4 \text{ et } T = z^3 + z^5 + z^6.$$

- (a) Calculer la somme $S + T$.
 - (b) Calculer le produit ST .
 - (c) En déduire que S et T sont les deux racines d'un trinôme que l'on précisera.
Indication : penser aux relations coefficients-racines.
3. (a) Donner la partie imaginaire de S .
 - (b) Montrer que cette partie imaginaire est positive.
Indication : on rappelle que la fonction *sinus* est croissante et positive sur $[0, \pi/2]$.
 - (c) Calculer S et T .