Fiche n° 2.2

Sommes et produits

Exercice 1. Écrire les sommes suivantes en extension, puis calculer :

$$\sum_{k=2}^{5} k \quad , \quad \sum_{k=1}^{4}(k+1) \quad , \quad \sum_{k=0}^{3} 2k \quad , \quad \sum_{k=0}^{2} k(2-k) \quad , \quad \sum_{k=2}^{2} k \quad , \quad \sum_{k=0}^{3} 2^k \quad , \quad \sum_{k=0}^{3} 2^{3-k} \quad , \quad \sum_{k=0}^{5} 1$$

Exercice 2. $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite réelle donnée, et n est un entier naturel fixé.
Écrire les sommes suivantes avec le symbole $\sum$ (il y a plusieurs écritures possibles !) :

1. $5+6+7+8$,
2. $6+8+10$,
3. $a_6+a_8+a_{10}$,
4. $3a_1+3a_2+3a_3+3a_4$,
5. $2+2+2+2+2+2$,
6. $1+3+5+7+9+11$,
7. $1+2+3+...+(2n-1)+2n$,
8. $a_n+a_{n-1}+a_{n-2}+...+a_1+a_0$.
9. $(a_1+1)+(a_2+2)+...+(a_n+n)$
10. $(a_1+1)+(a_2+1)+...+(a_n+1)$,
11. $a_{10}+a_{20}+a_{30}+a_{40}+a_{50}$
12. $na_0+(n-1)a_1+(n-2)a_2+...+2a_{n-2}+1a_{n-1}+0\times a_n$.

Exercice 3. Écrire les produits suivants en extension et les calculer :

$$\prod_{k=1}^{3} k, \quad \prod_{k=0}^{123} k, \quad \prod_{k=6}^{30}(k-17) \quad \prod_{k=3}^{5}(k-2), \quad \prod_{k=1}^{2} 2k, \quad \prod_{k=1}^{10} \frac{k}{k+1}.$$

Exercice 4. Écrire à l'aide de factorielles :

$$\prod_{i=1}^{n}(2i) \ , \ \prod_{i=3}^{n}(i^2) \ , \prod_{i=1}^{n}(n+5-i) \ , \ \prod_{i=1}^{n}(2i-1) \ , \ \prod_{k=1}^{n}(3k+1)(3k-1).$$

Exercice 5. Calculer :

$$\prod_{k=0}^{n} 2^k \ , \ \prod_{k=0}^{n} e^{n^2} \ , \ \prod_{k=0}^{n} e^{k^2} \ \prod_{k=0}^{n} \exp\left(2k+\sqrt{3}\right), \prod_{k=0}^{n} \exp\left((-1)^k\binom{n}{k}\right), \ \prod_{k=1}^{n}\frac{k+2}{k} \ , \ \ln\left(\frac{(4n)!}{(2n)!}\right), \ \prod_{k=0}^{n}(e^{k+3})^3.$$

Exercice 6. Compléter les égalités suivantes :

$$\sum_{k=1}^{2009} k^6 = \sum_{...}^{1789} n^6 + \sum_{...}^{...} j^6 = \sum_{\substack{p=1 \\ p \text{ impair}}}^{2009} (\ldots)^6 + \sum_{\substack{p=1 \\ ...}}^{2009} p^6 = \sum_{...}^{...}(2n+1)^6 + \sum_{...}^{...}(2n)^6 = \sum_{...}^{...}(3n)^6 + \sum_{...}^{...}(3n+1)^6 + \sum_{...}^{...}(3n+2)^6.$$

$$\sum_{k=1}^{2009} k^6 = \sum_{\cdots}^{\cdots}(3n)^6 + \sum_{\cdots}^{\cdots}(3n+1)^6 + \sum_{\cdots}^{\cdots}(3n+2)^6 \quad ; \quad \sum_{k=1}^{2n} e^{n^2} = \ldots \quad ; \quad \exp\Big(\sum_{k=1}^{n+2}(2k+1)\Big) = \prod_{\cdots}^{\cdots} e^p.$$

$$\exp\Big(\sum_{k=1}^{2n}(3+2k)\Big) = \exp(\ldots)\Big(\prod_{\cdots}^{\cdots} e^k\Big)^{\cdots}; \quad \exp\Big(\sum_{k=1}^{2n}(3+2k)\Big) = \exp(\ldots) \quad ; \quad \ln\Big(\prod_{k=2}^{2n} k^2\Big) = \ldots \sum_{k=2}^{\cdots} \ln(k)$$

$$\frac{n^2}{2n} + \frac{(n+1)^2}{2n+1} + \frac{(n+2)^2}{2n+2} + \ldots + \frac{4n^2}{3n} = \sum_{k=\ldots}^{\cdots} \frac{k^2}{k+n} = \sum_{l=2n}^{\cdots} \frac{\cdots}{\cdots} = \sum_{k=1}^{\cdots} \frac{\cdots}{\cdots} = \sum_{i=\ldots}^{n} \frac{\cdots}{\cdots}.$$

$$\ln\left(\frac{(4n)!}{(2n)!}\right) = \ln\Big(\prod_{k=\ldots}^{\cdots} \ldots\Big) = 2\sum_{k=\ldots}^{\cdots} \ln(k) \quad ; \quad \sum_{k=1}^{2n}(\sqrt{k}+\sqrt{\pi}) = \ldots + \sum_{k=1}^{2n}\sqrt{k} = \ldots + \sum_{\substack{k=1 \\ \ldots\equiv 1[2]}}^{2n} \ldots + \sum_{\substack{k=1 \\ \ldots\equiv\ldots[2]}}^{2n} \ldots .$$

$$\ln\Big(\prod_{\substack{k=1 \\ k\equiv 0[3]}}^{3n} k\Big) = \sum_{p=\ldots}^{\cdots} \ln(3p) = \ldots \ln 3 + \sum_{p=\ldots}^{\cdots} \ln(p) = \ln(3^{\cdots}(\ldots!)) \; ; \frac{(4n)!(5n)!}{(2n-1)!(3n+1)!} = \prod_{k=\ldots}^{\cdots} k \prod_{k=\ldots}^{\cdots} k = \Big(\prod_{k=3n}^{4n} k\Big)^2 \ldots .$$

$$\prod_{p=1}^{n} \frac{2p+1}{p} = \frac{\prod_{p=1}^{n}(2p)\prod_{p=1}^{n}(2p+1)}{(\ldots)^2} = \frac{(2n+1)!}{\ldots}; \prod_{p=1}^{2n+1} e^{p^2-3p-2} = \ldots \prod_{p=1}^{2n+1} e^{p^2} \prod_{\ldots=1}^{\cdots} e^{-3i} = \ldots \exp(\ldots)\exp(\ldots).$$

$$\prod_{p=0}^{2n+1} e^p = \exp\Big(\sum_{\cdots}^{\cdots} \ldots\Big) = \exp\Big(\ldots\Big) \; ; \prod_{p=0}^{2n+1} e^p = \prod_{\substack{p=0 \\ p\equiv 0[2]}}^{2n+1} e^p \prod_{\substack{p=0 \\ p\equiv\ldots[2]}}^{2n+1} e^p = \prod_{p=0}^{n} e^{\cdots} \prod_{p=\ldots}^{\cdots} e^{2p+1} = \Big(\prod_{p=0}^{n} e^p\Big)^{\cdots} e^{\cdots} = \ldots .$$

Exercice 7. Sommes télescopiques. Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle. Simplifier :

$$\sum_{k=0}^{n}(a_{n+1}-a_n). \quad \text{(On pourra écrire la somme en extension.)}$$

Exercice 8. Sommes télescopiques. Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ les suites définies explicitement pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ par

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} \text{ et } v_n = \prod_{k=1}^{n} (e^{-\frac{3}{k}})^{\frac{1}{k+1}}.$$

1. Démontrer qu'il existe deux réels a et b tels que

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad \frac{1}{k(k+1)} = \frac{a}{k} + \frac{b}{k+1}.$$

2. En déduire l'expression simplifiée

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n = 1 - \frac{1}{n+1},$$

préciser la monotonie et la convergence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

3. En déduire la monotonie et la convergence de la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

Exercice 9.

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer :

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \text{ et } \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k}.$$

2. On pose
$$S=\sum_{0\leq 2\ell\leq n}\binom{n}{2\ell} \quad \text{et} \quad T=\sum_{0\leq 2\ell+1\leq n}\binom{n}{2\ell+1}.$$
Déterminer $S+T$ et $S-T$.
3. En déduire S et T.

Exercice 10. Calculer :
$$\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k\binom{n}{k}}{2^k},\quad \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}2^{2k}\ ,\ \sum_{k=0}^{n}\frac{\binom{n}{k}}{k+1}\ ,\ \sum_{k=0}^{n}(k+2)\binom{n}{k}\ ,\ \sum_{k=1}^{n}k2^k.$$

Exercice 11. Calculer :
$$\sum_{k=0}^{n}\sin^2 k\theta\ ,\ \sum_{k=0}^{n}\frac{\cos k\theta}{\cos^k\theta} \text{ où } \theta\not\equiv\frac{\pi}{2}[\pi].$$

Exercice 12. Soit $(x_{ij})_{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2}$ une famille de nombres complexes. Comparer :
$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}a_{ij} \text{ et } \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}a_{ij},$$
$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{i}a_{ij} \text{ et } \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=j}^{n}a_{ij},$$
$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{i}a_{ij}+\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{j}a_{ij} \text{ et } \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}a_{ij},$$
$$\sum_{k=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{k}a_{kj}+\sum_{i=1}^{k-1}a_{ik}\right) \text{ et } \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}.$$

Exercice 13. Calculer :
$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}1\ ,\ \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}i\ ,\ \sum_{i=1}^{n}i+\sum_{j=1}^{n}j\ ,\ \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}(i+j)\ ,$$
$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}ij\ ,\ \left(\sum_{i=1}^{n}i\right)\left(\sum_{j=1}^{n}j\right)\ ,\ \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{i}\min(i,j).$$