DS n°2 : Fonctions usuelles ; nombres complexes

Durée : 4 heures **Documents et calculatrices interdits**

Problème On considère les deux fonctions f et g définies par

$$f(x) = \frac{1}{2}\arctan(\mathrm{sh}x) \text{ et } g(x) = \arctan\left(\frac{\mathrm{sh}x}{1+\mathrm{ch}x}\right).$$

Le but du problème est de montrer, par deux méthodes différentes, que $f = g$.

1) Première méthode (utilisant les dérivées)

a) **Question de cours** : rappeler la relation liant ch^2x et sh^2x pour tout réel x.
$\to$ On a, pour tout réel x : $\mathrm{ch}^2x - \mathrm{sh}^2x = 1$.

b) Préciser et justifier le domaine de définition de f et de g.
$\to$ sh est définie sur $\mathbb{R}$, à valeurs dans $\mathbb{R}$, et arctan est définie sur $\mathbb{R}$. f est donc définie sur $\mathbb{R}$ (composition de fonctions).
De même, $\dfrac{\mathrm{sh}x}{1+\mathrm{ch}x}$ est définie sur $\mathbb{R}$ (le dénominateur ne s'annule pas...), à valeurs dans $\mathbb{R}$ et arctan est définie sur $\mathbb{R}$. g est donc définie sur $\mathbb{R}$ (composition de fonctions).

c) Préciser les points où f est dérivable et montrer que $f' = \dfrac{1}{2\,\mathrm{ch}}$.
$\to$ D'après le cours sur la composition de fonctions, f est dérivable sur $\mathbb{R}$. Il faut savoir mener à bien le calcul de la dérivée.

d) Faire de même avec la fonction g. On justifiera le calcul efffectué.
$\to$ De même, g est dérivable sur $\mathbb{R}$, et après calculs (qui doivent figurer sur la copie), on trouve $g' = \dfrac{1}{2\,\mathrm{ch}}$.

e) En déduire que $f = g$.
$\to$ f et g sont définies et dérivables sur $\mathbb{R}$, et elles ont la même dérivée. On peut donc en déduire qu'il existe une constante $c \in \mathbb{R}$ telle que $f = g + c$. Or $f(0) = g(0) = 0$, donc $c = 0$ et $f = g$.

2) Deuxième méthode (trigonométrique)

a) Donner un exemple de deux réels **distincts** avec $a \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ et $b \in \left]-\pi, \pi\right[$ et tels que $\tan a = \tan b$.
$\to$ On pose $a = \pi/4$ et $b = -3\pi/4$. Alors $a \neq b$ et pourtant $\tan a = \tan b$.

b) Montrer que pour tout réel x, $f(x) \in \left]-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right[$.
$\to$ Pour tout réel y, on sait que $-\pi/2 < \arctan(y) < \pi/2$. Par conséquent, pour tout réel x, $-\pi/2 < \arctan(\mathrm{sh}x) < \pi/2$, d'où l'inégalité demandée en divisant par 2.
En déduire que pour tout réel x, $\tan(2f(x)) = \mathrm{sh}(x)$.

$\rightarrow$ tan réalise une bijection de $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ vers $\mathbb{R}$, dont la réciproque est arctan. Puisque $-\pi/2 < 2f(x) < \pi/2$ pour tout x, on a :

$$\tan(2f(x)) = \tan(\arctan(\mathrm{sh}(x))) = \mathrm{sh}(x).$$

On considère maintenant la fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = \left(\frac{\mathrm{sh}x}{1+\mathrm{ch}x}\right)$.

c) En étudiant la fonction h (variations, limites...), montrer que $h(x) \in]-1, 1[$ pour tout réel x.
$\rightarrow$ h est définie, dérivable sur $\mathbb{R}$ comme quotient de fonctions définies et dérivables dont le dénominateur ne s'annule pas. Après calculs, on trouve $h' = \frac{1}{1+\mathrm{ch}}$, qui est une fonction strictement positive sur $\mathbb{R}$. h est donc strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
De plus, si x est un réel, alors $h(x) = \frac{1-e^{-2x}}{1+e^{-2x}+2e^{-x}}$ (en factorisant au numérateur et au dénominateur par e^x...), donc $\lim\limits_{+\infty} h = 1$.
De même, $\lim\limits_{-\infty} h = -1$ (vous pouvez remarquer que h est impaire !).
On peut récapituler les résultats obtenus dans un tableau de variations :

x	$-\infty$	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	
$f(x)$	-1 $\nearrow$	1

On a donc bien $h(x) \in]-1, 1[$ pour tout réel x.

d) En déduire que pour tout réel x, $g(x) \in \left]-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right[$.
$\rightarrow$ On a $g = \arctan \circ h$. g est une fonction strictement croissante (comme composée de deux fonctions strictement croissantes). De plus, $\lim\limits_{-\infty} g = \arctan(\lim\limits_{-\infty} h) = \arctan(-1) = -\pi/4$. De même, $\lim\limits_{+\infty} g = \pi/4$. On en déduit que pour tout réel x, on a $g(x) \in \left]-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right[$.

e) Montrer que pour tout $\theta \in \left]-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right[$, on a : $\tan(2\theta) = \frac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta}$.
$\rightarrow$ On applique la formule $\tan(a+b) = \frac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a \tan b}$ à $a = b = \theta$ pour obtenir l'identité voulue.

f) En déduire que pour tout réel x, $\tan(2g(x)) = \mathrm{sh}(x)$.
$\rightarrow$ Puisque $g(x) \in \left]-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right[$, on peut appliquer le résultat de la question précédente à $\theta = g(x)$, pour obtenir :

$$\tan(2g(x)) = \frac{2\tan(g(x))}{1-\tan^2(g(x))}.$$

Or $\tan(g(x)) = \tan(\arctan(h(x)) = h(x)$ pour tout x, donc

$$\tan(2g(x)) = \frac{2h(x)}{1-h(x)^2} = \mathrm{sh}(x).$$

g) En déduire que $f = g$ (on pourra méditer sur la question a).
$\rightarrow$ On a $\tan(2g(x)) = \tan(2f(x))$ pour tout réel x. Puisque $2f(x)$ et $2g(x)$ appartiennent à $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ et que tan réalise une bijection de $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ vers $\mathbb{R}$, on a $2f(x) = 2g(x)$, et donc $f(x) = g(x)$ pour tout x.

3) Une application de l'égalité entre f et g.

a) En utilisant la définition de ch et sh, donner une expression simple de $\mathrm{ch}\left(\frac{\ln 3}{2}\right)$ et de $\mathrm{sh}\left(\frac{\ln 3}{2}\right)$.
$\rightarrow$ Puisque $e^{\ln(3)/2} = \sqrt{3}$ et $e^{-\ln(3)/2} = 1/\sqrt{3}$, on obtient :

$$\mathrm{ch}\left(\frac{\ln 3}{2}\right) = \frac{2}{\sqrt{3}} \text{ et } \mathrm{sh}\left(\frac{\ln 3}{2}\right) = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

b) En utilisant l'égalité $f(x) = g(x)$ pour $x = \frac{\ln 3}{2}$, la tangente de quel angle peut-on déduire ?
$\rightarrow$ On trouve $f\left(\frac{\ln 3}{2}\right) = \frac{1}{2}\arctan\left(\mathrm{sh}\left(\frac{\ln 3}{2}\right)\right) = \frac{1}{2}\arctan\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{\pi}{12}$ (pensez aux valeurs remarquables de tangente...).
De même, $g\left(\frac{\ln 3}{2}\right) = \arctan\left(\frac{1}{\sqrt{3}+2}\right)$.
On obtient donc $\tan\frac{\pi}{12} = \tan\left[\arctan\left(\frac{1}{\sqrt{3}+2}\right)\right] = \frac{1}{\sqrt{3}+2}$.

Exercice 1 On définit le polynôme $P(X) = \frac{1}{2i}\left((X+i)^5 - (X-i)^5\right)$.

1) Question de cours : donner la définition et l'expression des racines $5^{\text{ièmes}}$ de l'unité.
$\rightarrow$ Par définition, les racines $5^{\text{ièmes}}$ de l'unité sont les complexes $z \in \mathbb{C}$ vérifiant $z^5 = 1$. Elles sont au nombre de 5, données par $\{e^{2ik\pi/5} \mid k = 0, \ldots, 4\}$.

2) A l'aide de ces racines $5^{\text{ièmes}}$ de l'unité, déterminer les racines du polynôme P.
$\rightarrow$ Soit z une racine de P. Alors z vérifie $(z+i)^5 = (z-i)^5$, ou encore (puisque i n'est pas racine, on peut diviser par $z-i$...) $\left(\frac{z+i}{z-i}\right)^5 = 1$. Ce sont donc les complexes z tels que $\frac{z+i}{z-i} \in \mathbb{U}_5$, ce qui équivaut à $\frac{z+i}{z-i} = e^{2ik\pi/5}$ (pour $k = 0, \ldots, 4$).
Le cas $k = 0$ est impossible, et si $k = 1, 2, 3$ ou 4, on trouve :

$$z = -i\frac{1+e^{2ik\pi/5}}{1-e^{2ik\pi/5}}.$$

En se rappelant des formules de factorisation par l'angle moitié, on trouve :

$$z = -i\frac{\cos(2k\pi/5)}{\sin(2k\pi/5)} = 1/\tan(2k\pi/5) \quad k = 1, \dots, 4.$$

Réciproquement, les quatre valeurs obtenues sont bien des racines de P (on peut remonter les calculs).
Vérifier qu'elles sont toutes réelles.
→ C'est évident.

3) Vérifier que le polynôme P peut s'écrire sous la forme $P(X) = aX^4 + bX^2 + c$ avec a, b et c des réels que l'on calculera.
→ On trouve, par une méthode d'identification des coefficients : $P(X) = 5X^4 - 10X^2 + 1$.
Rechercher les racines de P par une autre méthode qu'à la question précédente.
→ On doit résoudre $5z^4 - 10z^2 + 1 = 0$. On pose $Z = z^2$. Alors $5Z^2 - 10Z + 1 = 0$. On peut en déduire (c'est un trinôme !) que $Z = 1 \pm 2/5\sqrt{5}$. Pour trouver les racines z, il s'agit maintenant de déterminer les racines carrées des nombres complexes $1 \pm 2\sqrt{5}/5$. On trouve finalement quatre racines : $z = \pm\dfrac{\sqrt{25 \pm 10\sqrt{5}}}{5}$.

4) Comparer les résultats obtenus aux questions 2 et 3 pour en déduire des résultats précédents les valeurs exactes de $\tan\left(\frac{\pi}{5}\right)$ et $\tan\left(\frac{2\pi}{5}\right)$.
→ $0 < \tan\left(\frac{\pi}{5}\right) < 1$ (faire un dessin de cercle trigo !). Par conséquent, $\tan\left(\frac{\pi}{5}\right) = \dfrac{\sqrt{25 - 10\sqrt{5}}}{5}$.
De même, $\tan\left(\frac{2\pi}{5}\right) > 1$, donc $\tan\left(\frac{2\pi}{5}\right) = \dfrac{\sqrt{25 + 10\sqrt{5}}}{5}$.

Exercice 2 Dans le plan complexe rapporté au repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j})$, on considère la fonction qui, à tout point M d'affixe z ($z \neq 2i$), associe le point M' d'affixe z' donnée par

$$z' = \frac{z - 3 + i}{2i - z}\ .$$

1) Quel est l'ensemble des points M tels que M' soit sur l'axe réel ?
→ On considère les points $A(3-i)$ et $B(2i)$. M' est sur l'axe réel si et seulement si $z' = 0$ (cas $M = A$) ou si $\arg(z') = 0\ [\pi]$. Pour $z \neq 2i$ (càd $M \neq B$) et $z \neq 3 - i$, on a :

$$\begin{aligned}
\arg(z') = 0\ [\pi] &\Leftrightarrow \arg(-z') = 0\ [\pi] \\
&\Leftrightarrow \arg\frac{z - 3 + i}{z - 2i} = 0\ [\pi] \\
&\Leftrightarrow (\overrightarrow{MB}, \overrightarrow{MA}) = 0\ [\pi] \\
&\Leftrightarrow M, B, A \text{ sont alignés} \\
&\Leftrightarrow M \text{ appartient à la droite } (AB).
\end{aligned}$$

L'ensemble recherché est donc la droite (AB) privée de B.

2) Quel est l'ensemble des points M tels que $\arg(z') = 3\pi/2\ [2\pi]$?
$\rightarrow$ Un raisonnement similaire montre que l'ensemble cherché est le demi-cercle de diamètre $[AB]$ situé « sous »$[AB]$, privé de B.
Rappel : $(\overrightarrow{MB}, \overrightarrow{MA})$ est un angle droite si et seulement si M appartient au cercle de diamètre $[AB]$.

3) Quel est l'ensemble des points M tels que $|z'| = 2$?
$\rightarrow$ Il s'agit des points $M \neq B$ tels que $AM = 2BM$, soit $AM^2 = 4BM^2$. Or :

$$\begin{aligned} AM^2 = 4BM^2 &\Leftrightarrow |z-a|^2 = 4|z-b|^2 \Leftrightarrow (z-a)\overline{(z-a)} = 4(z-b)\overline{(z-b)} \\ &\Leftrightarrow z\bar{z} - a\bar{z} - \bar{a}z + a\bar{a} = 4(z\bar{z} - b\bar{z} - \bar{b}z + b\bar{b}) \\ &\Leftrightarrow 3|z|^2 - (4b-a)\bar{z} - \overline{(4b-a)}z + 4|b|^2 - |a|^2 = 0 \\ &\Leftrightarrow \text{... (calculs à savoir faire !)} \\ &\Leftrightarrow \left|z - \frac{4b-a}{3}\right|^2 = \frac{|a|^2 - 4|b|^2}{3} + \left|\frac{4b-a}{3}\right|^2 = 8. \end{aligned}$$

L'ensemble cherché est donc le cercle de centre $G\left(\dfrac{4b-a}{3}\right)$ et de rayon $2\sqrt{2}$.

Exercice 3 **1)** Donner une preuve géométrique (sans calcul !) de l'équivalence suivante :

$$z \in \mathbb{R} \Longleftrightarrow \left|\frac{z-i}{z+i}\right| = 1.$$

$\rightarrow$ Soient $A(i)$ et $B(-i)$. Alors :

$$\begin{aligned} \left|\frac{z-i}{z+i}\right| = 1 &\Longleftrightarrow |z-i| = |z+i| \\ &\Longleftrightarrow M(z) \in \text{med}[AB]. \end{aligned}$$

Cette médiatrice étant l'axe réel (i et $-i$ sont conjugués), on obtient le résultat demandé.

2) Soient A, B, C, D quatre points distincts du plan, d'affixes a, b, c, d. On suppose que

$$a + ib = c + id \qquad \text{et} \qquad a + c = b + d\ .$$

Montrer que le quadrilatère $ABCD$ est un carré (*penser aux propriétés des diagonales* $[AC]$ *et* $[BD]$).
$\rightarrow$
– On a $a - c = i(d - b)$, donc $|a - c| = |d - b|$, d'où $AC = BD$: les diagonales ont même longueur.
– De plus, $\dfrac{a+c}{2} = \dfrac{b+d}{2}$, donc les diagonales se coupent en leur milieu.
– En outre, $a - c = i(d - b)$ donc les diagonales sont perpendiculaires.
On en déduit que $ABCD$ est un carré.

3) On suppose de plus que C et D sont à coordonnées entières (*càd* que leurs parties réelles et imaginaires sont des nombres entiers relatifs).
Montrer que A et B le sont aussi.
$\rightarrow$ On résout le système :

$$\begin{cases} a + ib &= c + id \\ a - b &= -c + d. \end{cases}$$

On trouve par exemple $(1+i)a = c(1-i) + d(1+i)$, et donc $a = -ic + d$ (se rappeler que $\frac{1-i}{1+i} = -i$...). Par conséquent, si C et D sont à coordonnées entières, A l'est aussi.
De même pour B...